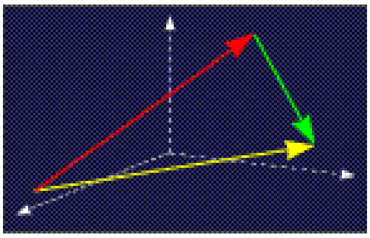

Zahlenpaare und Zahlentripel

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum wird besprochen, was Zahlenpaare und Zahlentripel sind, wie man mit ihnen rechnet und wie man sie geometrisch interpretieren kann.

1 Zahlenpaare rechnerisch

Ein Zahlenpaar ist eine (geordnete) Liste zweier Zahlen. „Geordnet“ bedeutet, dass es eine erste und eine zweite Zahl gibt[1]. Wenn nichts anderes dazugesagt wird, ist eine Liste aus reellen Zahlen gemeint. (Die genaue Benennung wäre „reelles Zahlenpaar“.) Ist beispielsweise die erste Zahl gleich -5 und die zweite π^2, so kann das Zahlenpaar entweder in Zeilenform oder in Spaltenform angeschrieben werden:

$$(-5, \pi^2) \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} -5 \\ \pi^2 \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Die beiden Zahlen werden als **Komponenten** oder **Koordinaten** des Zahlenpaares bezeichnet.

Die Menge aller reellen Zahlenpaare wird mit dem Symbol $\mathbb{R}^2$ (ausgesprochen „$\mathbb{R}$ zwei“) bezeichnet[2].

Was die beiden Zahlen in einem Zahlenpaar bedeuten, ist zunächst nicht weiter festgelegt. Wichtig für uns ist, dass man mit Zahlenpaaren rechnen kann:

[1] Es ist also zwischen dem Paar $(2, 3)$ und der Menge $\{2, 3\}$ zu unterscheiden! Für Paare gilt $(2, 3) \neq (3, 2)$, aber für Mengen gilt $\{2, 3\} = \{3, 2\}$.

[2] Sie kann als das „kartesische Produkt“ der Menge $\mathbb{R}$ mit sich selbst verstanden werden, wobei das kartesische Produkt zweier Mengen A und B, angeschrieben als $A \times B$ (ausgesprochen „A kreuz B“), definiert ist als die Menge aller Paare (a, b), für die a ein Element von A und b ein Element von B ist. In diesem Sinn ist $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Siehe dazu auch das Skriptum *Mengen und Mengenoperationen*.

- Zunächst können Zahlenpaare **addiert** werden. Dabei ist das Ergebnis wieder ein Zahlenpaar, wobei die erste Komponente der Summe gleich der Summe der beiden ersten Komponenten und die zweite Komponente der Summe gleich der Summe der beiden zweiten Komponenten ist. Anhand eines Beispiels, in Zeilen- und Spaltenform angeschrieben:

$$(2,-3)+(6,7)=(8,4) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 4 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

- Weiters können **Vielfache** von Zahlenpaaren gebildet werden. So berechnen wir etwa das 3-fache eines Zahlenpaares, indem wir beide Komponenten mit 3 multiplizieren:

$$3\,(6,7)=(18,21) \qquad \text{bzw.} \qquad 3\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 21 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

  Statt $3\,(6,7)$ kann auch $3\cdot(6,7)$ (also mit „Malpunkt“) geschrieben werden.

- Addieren und das Bilden von Vielfachen können beliebig miteinander kombiniert werden. So ist beispielsweise

$$5\,(2,-3)+2\,(6,7)=(22,-1) \qquad \text{bzw.} \qquad 5\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 \\ -1 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

  (Rechnen Sie nach!) Eine derartige Kombination (d.h. eine Summe von Vielfachen von Zahlenpaaren) heißt **Linearkombination**.

- Die Differenz zweier Zahlenpaare, wie beispielsweise

$$(2,-3)-(6,7)=(-4,-10) \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -10 \end{pmatrix}, \tag{1.5}$$

  kann ebenfalls als Linearkombination „erstes Zahlenpaar $+\,(-1)\cdot$ zweites Zahlenpaar“ angesehen werden.

Die zwei elementaren Rechenoperationen mit Zahlenpaaren sind also “Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“, und aus ihnen ergibt sich die Möglichkeit, beliebige Linearkombinationen (einschließlich der Differenz) zu bilden.

2 Zahlenpaare geometrisch

Wir haben bereits erwähnt, dass zunächst nicht weiter festgelegt ist, was die beiden Komponenten eines Zahlenpaares bedeuten. Es könnte sich um Massen von Teilen eines Motors handeln, um Preise von Waren, Stückzahlen und vieles mehr. Wir können ihnen aber auch *geometrische Bedeutungen* geben. Zwei derartige geometrische Bedeutungen sind besonders wichtig.

- Ein Zahlenpaar kann dazu benutzt werden, um den Ort eines **Punktes** in einer Ebene zu beschreiben. Die Komponenten des Paares werden dabei als Koordinaten eines Punktes gedeutet. Dazu benötigen wir zuerst eine Ebene – wir stellen sie uns gedanklich als „ideale" Ebene vor, die sich in allen Richtungen bis ins Unendliche erstreckt. Um diese Vorstellung zu unterstützen, nehmen wir ein Blatt Papier, das zumindest einen Ausschnitt dieser Ebene (die wir auch **Zeichenebene** nennen können) darstellen soll. Auf dieses zeichnen wir mit dem Geodreieck zwei „Koordinatenachsen", d.h. zwei aufeinander normal stehende Geraden, die beide als Modell der Zahlengeraden aufgefasst werden können. Die „erste Achse" (die so genannte *Abszisse*) legen wir üblicherweise so, dass die Richtung ansteigender Markierungen von links nach rechts verläuft. Die „zweite Achse" (die so genannte *Ordinate*) wird so orientiert, dass die Richtung ansteigender Markierungen auf dem Blatt Papier „von uns weg" (oder auf dem Bildschirm „von unten nach oben") verläuft.

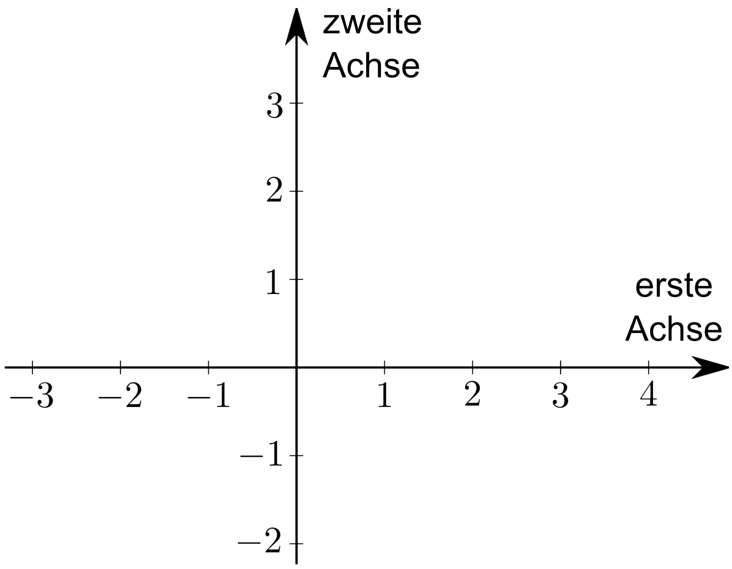

Abbildung 1: (Ausschnitt der) Zeichenebene mit Koordinatensystem.

Den Punkt, der durch das Zahlenpaar $(2, 3)$ dargestellt wird, erhalten wir, indem wir vom Ursprung (dem Schnittpunkt der Achsen) eine Strecke der Länge 2 in Richtung der ersten Achse (nach „rechts") und eine Strecke der Länge 3 in Richtung der zweiten Achse (nach „oben") gehen (oder in umgekehrter Reihenfolge: zuerst eine Strecke der Länge 3 in Richtung der zweiten Achse und danach eine Strecke der Länge 2 in Richtung der ersten Achse). Das Gleiche kann auch mit beliebigen anderen Zahlenpaaren gemacht werden, wobei wir im Fall einer negativen Koordinate in die jeweilige Gegenrichtung (nach „links" bzw. nach „unten") gehen. Abbildung 2 zeigt vier ausgewählte Punkte. Der Koordinatenursprung (kurz: Ursprung) ist der Schnittpunkt der beiden Achsen. Er ist durch das Zahlenpaar $(0, 0)$ charakterisiert.

Auf diese Weise ist ein **Koordinatensystem** in der Zeichenebene festgelegt. Wir können es etwas genauer ein *kartesisches* Koordinatensystem[3] nennen, da es auch andere Me-

[3] Zu Ehren von René Descartes (1596 – 1650).

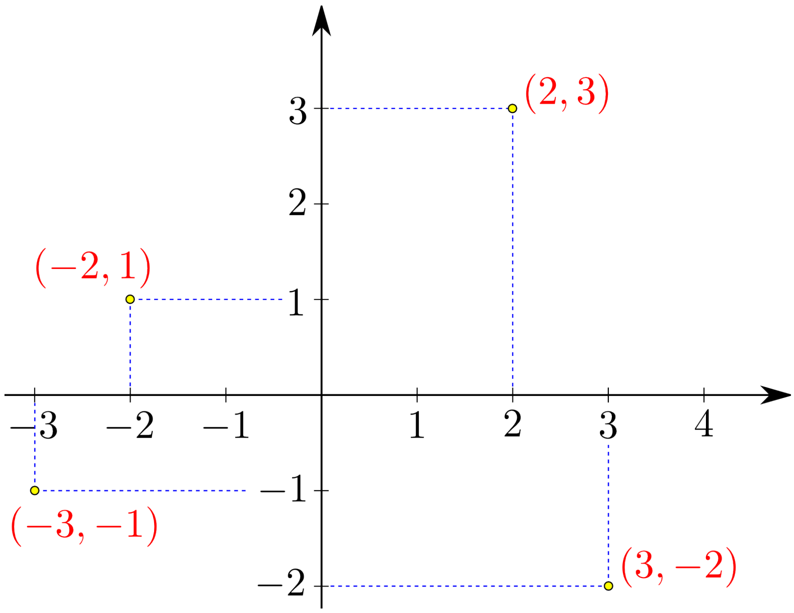

Abbildung 2: Zeichenebene, Koordinatensystem und vier ausgewählte Punkte.

thoden gibt, den Ort eines Punktes in der Ebene durch zwei Zahlen zu charakterisieren. In Bezug auf ein Koordinatensystem können Zahlenpaare als Punkte gedeutet werden. In mathematischer Hinsicht ist die mit einem Koordinatensystem ausgestattete Zeichenebene eine Visualisierung der Menge $\mathbb{R}^2$. Die Identifizierung der Zeichenebene mit dem $\mathbb{R}^2$ (der Menge aller rellen Zahlenpaare) ist so stark, dass wir sprachlich zwischen ihnen oft gar nicht unterscheiden und $\mathbb{R}^2$ schlicht als „Ebene" bezeichnen.

Die Werte auf den Koordinatenachsen werden oft mit Symbolen bezeichnet, wie beispielsweise x_1 und x_2 (oder x und y). Die Achsen werden dann dementsprechend als x_1-Achse und x_2-Achse (oder x-Achse und y-Achse), die Koordinaten eines Punktes als x_1-Koordinate und x_2-Koordinate (oder x-Koordinate und y-Koordinate) bezeichnet. (Selbstverständlich sind auch andere Bezeichnungen möglich, beispielsweise wenn auf der ersten Achse die Zeit t aufgetragen wird – wir nennen sie dann t-Achse.) Die Identifizierung von Zahlenpaaren mit Punkten ist so stark, dass man zwischen ihnen sprachlich meist gar keinen Unterschied macht: Statt „das Zahlenpaar $(2, 3)$" können wir auch „der Punkt $(2, 3)$" sagen.

Geben wir dem Punkt mit den Koordinaten $(2, 3)$ den Namen P, so schreiben wir einfach

$$P = (2, 3). \tag{2.1}$$

Bei der Bearbeitung geometrischer Fragestellungen ist es wichtig, sich vor Augen zu halten,

– dass die erste Achse aus genau jenen Punkten besteht, deren zweite Koordinate gleich 0 ist, und

– dass die zweite Achse aus genau jenen Punkten besteht, deren erste Koordinate gleich 0 ist.

Die vier Bereiche, in die die Ebene durch die Koordinatenachsen geteilt wird, werden als **Quadranten** bezeichnet und, ausgehend von jenem, in dem alle Koordinaten positiv sind („rechts oben"), im Gegenuhrzeigersinn als erster bis vierter Quadrant nummeriert.

- Es gibt aber auch eine zweite, nicht minder wichtige geometrische Bedeutung, die wir einem Zahlenpaar geben können: Ein Zahlenpaar kann dazu benutzt werden, um einen **Pfeil** in einer Ebene zu beschreiben. So beschreibt das Zahlenpaar $(4, 1)$ einen Pfeil, der, ausgehend von einem beliebigen Punkt (dem Anfangspunkt) zu einem Punkt verläuft, zu dem wir gelangen, indem wir eine Strecke der Länge 4 in Richtung der ersten Achse und eine Strecke der Länge 1 in Richtung der zweiten Achse gehen. Abbildung 3 zeigt einen Pfeil mit diesen Komponenten. Der Anfangspunkt eines Pfeils wird auch als *Schaft*, der Endpunkt als *Spitze* bezeichnet.

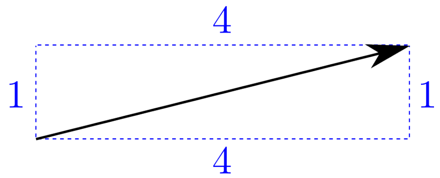

Abbildung 3: Pfeil mit Komponenten $(4, 1)$.

Das Gleiche kann auch mit beliebigen anderen Zahlenpaaren gemacht werden, wobei wir im Fall einer negativen Komponente in die jeweilige Gegenrichtung gehen. Wollen wir einem Pfeil, der durch das Zahlenpaar $(4, 1)$ charakterisiert wird, den Namen u geben, so schreiben wir einfach

$$u = (4, 1). \tag{2.2}$$

Zwei Pfeile, die durch die gleichen Komponenten charakterisiert werden, deren Anfangspunkte sich aber an unterschiedlichen Orten in der Ebene befinden, bezeichnet man im Allgemeinen mit dem gleichen Symbol.

Zahlenpaare werden auch **Vektoren** genannt. In manchen mathematischen Texten bezieht sich diese Bezeichnung nur auf die Deutung eines Zahlenpaares als Pfeil. Das Zahlenpaar $(0, 0)$ heißt auch „Nullvektor". In der Pfeil-Interpretation stellt es keinen Pfeil im eigentlichen Sinn dar, wird aber zugelassen, weil es beim Rechnen mit Zahlenpaaren jederzeit auftreten kann. Es wird oft einfach als 0 angeschrieben. Dass damit $(0, 0)$ gemeint ist, muss man dann aus dem Kontext erkennen.

Ob die beiden Zahlen eines Zahlenpaares als „Koordinaten" oder als „Komponenten" bezeichnet werden sollen, ist nicht strikt geregelt. Geht es um Zahlenpaare, die geometrisch gedeutet werden, so wird ersteres oft eher für die Punkt-Interpretation und zweiteres eher für die Pfeil-Interpretation verwendet (und wie Ihnen vielleicht schon aufgefallen ist, machen wir es hier genauso).

Zahlenpaare in der Interpretation als Punkte werden oft mit Großbuchstaben, Zahlenpaare in der Interpretation als Pfeile mit Kleinbuchstaben bezeichnet. Das ist nicht zwingend notwendig, aber praktisch. Zahlenpaare in der Interpretation als Pfeile werden auch oft mit einem über das entsprechende Symbol gestellten Pfeilchen („Vektorpfeilchen"), wie in $\vec{u}$, bezeichnet. In manchen Texten werden sie fett gedruckt, also in der Form $\mathbf{u}$.

Besitzen die Operationen „Addition" und „Multiplikation mit einer Zahl" (bzw. allgemein das Bilden beliebiger Linearkombinationen von Zahlenpaaren) ebenfalls eine geometrische Bedeutung? Die Antwort ist ein mehrfaches Ja:

- Die Addition zweier Zahlenpaare kann als „Hintereinanderhängen von Pfeilen" gedeutet werden. In Abbildung 4 ist ein Beispiel gezeigt. Interessant ist, dass sich das „Kommutativgesetz für die Addition von Zahlenpaaren" ($u+v=v+u$) auch geometrisch zeigt: Auf die Reihenfolge des „Hintereinanderhängens" kommt es nicht an. Dadurch ergibt sich ein Parallelogramm (Stichwort „Kräfteparallelogramm").

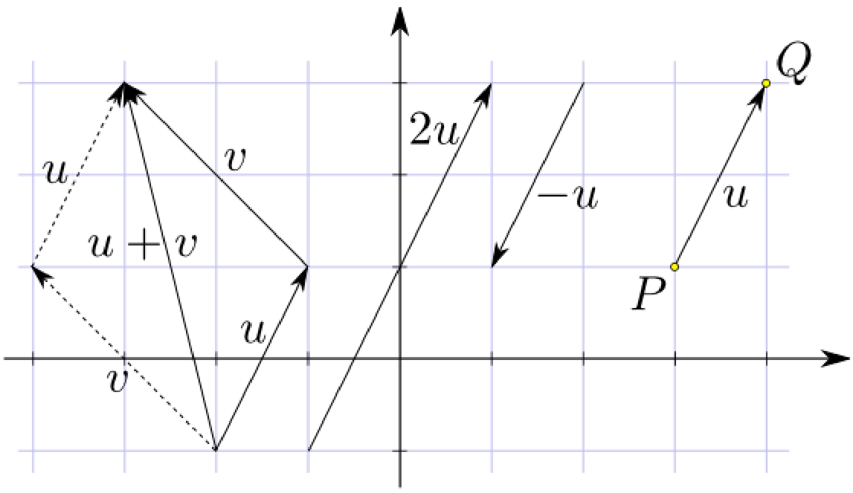

Abbildung 4: Geometrische Deutung der Rechenoperationen mit Zahlenpaaren: Gegeben sind die Zahlenpaare $P=(3,1)$, $u=(1,2)$ und $v=(-2,2)$. Wir interpretieren P als Punkt, u und v als Pfeile. Links ist die Addition $u+v$ als „Hintereinanderhängen von Pfeilen" gedeutet. Dass es dabei auf die Reihenfolge nicht ankommt, wird durch die gestrichelten Pfeile deutlich, die die Addition $v+u$ darstellen ("Kräfteparallelogramm"). In der Mitte sind $2u$ und $-u$ als Pfeile gedeutet. Rechts ist die Addition $P+u$ als Definition eines Punktes Q gedeutet: $Q=P+u$. Letzteres kann auch als Subtraktion $u=Q-P$ angeschrieben werden, wobei nun u gedeutet wird als Verbindungspfeil von P nach Q. Benutzen Sie das zusätzlich eingezeichnete *Koordinatenraster*, um zu verifizieren, dass die genannten (Rechen-)Operationen tatsächlich zu den gleichen Resultaten führen wie die entsprechenden geometrischen Operationen!

- Die Multiplikation eines Zahlenpaares mit einer Zahl c kann als Ver-c-fachung eines Pfeils gedeutet werden. Für $c>0$ wird damit eine Streckung oder Stauchung erzielt, für $c<0$ ist zusätzlich die Orientierung des Pfeils „umzudrehen". In Abbildung 4 ist dies, ausgehend von dem als Pfeil gedeuteten Zahlenpaar u, für $2u$ und $-u$ skizziert.

- Durch Kombination dieser beiden Operationen können auch allgemeine Linearkombinationen von Zahlenpaaren als Pfeil-Operationen gedeutet werden.

- Die Addition zweier Zahlenpaare kann im Sinn von „Punkt plus Pfeil" als Definition eines neuen Punktes gedeutet werden: Sind P und u Zahlenpaare und wird P als Punkt und u

als Pfeil gedeutet, so ist $Q = P + u$ der Endpunkt des Pfeils u, wenn sein Anfangspunkt in P gesetzt wird. In Abbildung 4 ist ein Beispiel skizziert.

- Eine besondere geometrische Bedeutung hat auch die Differenz zweier Zahlenpaare: Stellen P und Q Punkte dar, so stellt die Differenz $Q - P$ den Pfeil mit Anfangspunkt in P und Endpunkt in Q (d.h. den Verbindungspfeil von P nach Q, oft auch in der Form $\overrightarrow{PQ}$ angeschrieben) dar. Abbildung 4 zeigt auch dafür ein Beispiel.

3 Zahlentripel

In völliger Analogie zu Zahlenpaaren können auch Zahlentripel (d.h. geordnete Listen von *drei* Zahlen) betrachtet werden. Die Menge aller reellen Zahlentripel wird als $\mathbb{R}^3$ bezeichnet. Zahlentripel können addiert und mit Zahlen multipliziert werden, und es können beliebige Linearkombinationen gebildet werden, ganz so, wie wir es mit Zahlenpaaren gemacht haben. Auch Zahlentripel werden als Vektoren bezeichnet.

Hier ein Beispiel für eine Linearkombination von Zahlentripeln:

$$3 \cdot (-2, 5, 4) + 2 \cdot (1, 3, 7) = (-4, 21, 26) \tag{3.1}$$

oder, in Spaltenform angeschrieben:

$$3 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 21 \\ 26 \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

(Rechnen Sie nach!)

Um Zahlentripel geometrisch zu deuten, benötigen wir eine weitere Dimension: Die Menge $\mathbb{R}^3$ stellt den dreidimensionalen **Raum** dar[4]. Zusätzlich zu den zwei Koordinatenachsen der Zeichenebene errichten wir nun (in Gedanken) eine dritte (oft als x_3-Achse oder z-Achse bezeichnet), die auf die ersten beiden normal steht.

Die geometrische Deutung von Zahlentripeln als Punkte und Pfeile im Raum funktioniert ganz analog wie jene von Zahlenpaaren in der Ebene, und auch die oben aufgezählten geometrischen Deutungen der Operationen „Addition“ und „Multiplikation mit einer Zahl“ übertragen sich ohne Probleme auf den Raum. Ein Nachteil (und eine Herausforderung an unser Vorstellungsvermögen) besteht natürlich darin, dass wir räumliche Sachverhalte nicht direkt „zeichnen“ können, sondern uns mit ebenen Skizzen behelfen müssen.

[4] Sie kann auch als das dreifache kartesische Produkt der Menge $\mathbb{R}$ mit sich selbst, geschrieben als $\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}$, angesehen werden.

4 n-Tupel

Ergänzend erwähnen wir, dass die Konzepte des Zahlenpaars und des Zahlentripels auf beliebige Dimensionen verallgemeinert werden können. Für jede positive natürliche Zahl n können n-**Tupel**, d.h. geordnete Listen von n reellen Zahlen, betrachtet werden. Sie bilden die Menge $\mathbb{R}^n$, d.h. einen n-dimensionalen Raum, den wir uns für $n \geq 4$ natürlich überhaupt nicht mehr vorstellen können, in dem aber die Operationen „Addition" und „Multiplikation mit einer Zahl" rein rechnerisch ausgeführt werden können wie zuvor, etwa so:

$$3 \cdot (-2, 5, 4, -1) + 2 \cdot (1, 3, 7, 6) = (-4, 21, 26, 9) \tag{4.1}$$

oder, in Spaltenform angeschrieben:

$$3 \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 21 \\ 26 \\ 9 \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

Trotz mangelnder bildlicher Vorstellung können wir wie im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$ auch in höherdimensionalen Räumen von „Punkten" und „Pfeilen" sprechen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.