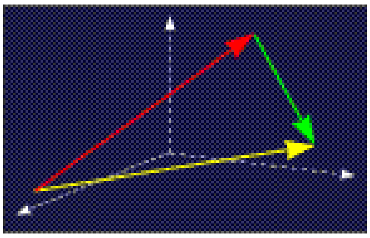
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Quadratische Gleichungen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden quadratische Gleichungen und einige mit ihnen zusammenhängende Themen behandelt: die Formen und Typen, in denen sie auftreten; wie sie gelöst werden; wie sie dabei helfen, quadratische Polynome zu faktorisieren; der Satz von Vieta, der einen schönen Zusammenhang zwischen den Koeffizienten und den Lösungen einer quadratischen Gleichung aufzeigt; und zur Abrundung ein Beispiel einer Gleichung vierten Grades, die auf eine quadratische Gleichung zurückgeführt werden kann.

1 Formen und Typen quadratischer Gleichungen

Eine quadratische Gleichung in der Variable x ist eine Gleichung, die sich durch Äquivalenzumformungen in die Form

$$a\,x^2 + b\,x + c = 0 \tag{1.1}$$

bringen lässt, wobei die Koeffizienten a, b, und c festgehaltene reelle Zahlen[1] sind und zudem $a \neq 0$ ist[2]. Auf der linken Seite steht ein Polynom zweiten Grades (ein quadratisches Polynom) in der Variable x. Dessen Koeffizienten (Vorfaktoren) sind a ($\neq 0$), b und c. So kann beispielsweise die Gleichung

$$3\,x^2 + 2\,x - 7 = x^2 - 4\,x + 1 \tag{1.2}$$

durch Subtraktion der rechten Seite von beiden Seiten (eine Äquivalenzumformung!) in

$$2\,x^2 + 6\,x - 8 = 0 \tag{1.3}$$

[1] Wir beschränken uns in diesem Skriptum auf quadratische Gleichungen im Rahmen der *reellen Zahlen*. Man kann a, b und c auch aus der erweiterten Zahlenmenge der *komplexen Zahlen* wählen – das werden wir in diesem Skriptum aber nicht tun. Auch als Grundmenge der hier betrachteten Gleichungen wird, sofern nichts anderes dazugesagt ist, die Menge der reellen Zahlen gewählt.

[2] Ist $a = 0$, so handelt es sich um eine lineare Gleichung.

umgewandelt werden. Wenn Sie sich nicht ganz sicher sind, wie (1.3) aus (1.2) entsteht, gehen Sie das folgende „Protokoll“ Schritt für Schritt durch:

$$\begin{aligned} 3\,x^2 + 2\,x - 7 &= x^2 - 4\,x + 1 & &|\quad -x^2 \\ 2\,x^2 + 2\,x - 7 &= -4\,x + 1 & &|\quad +4\,x \\ 2\,x^2 + 6\,x - 7 &= 1 & &|\quad -1 \\ 2\,x^2 + 6\,x - 8 &= 0 & & \end{aligned} \tag{1.4}$$

Die neue, vereinfachte Gleichung (1.3) ist zu (1.2) äquivalent, und sie ist nun von der Form (1.1) mit $a = 2$, $b = 6$ und $c = -8$. Zur Erinnerung, was eine *Gleichung* ist: (1.3) stellt die Frage dar, ob es eine oder mehrere reelle Zahlen x gibt, für die $2\,x^2 + 6\,x - 8 = 0$ gilt, und, falls ja, um welche Zahl(en) es sich dabei handelt.

Die Koeffizienten einer quadratischen Gleichung können, wie gesagt, beliebige reelle Zahlen sein (mit der einzigen Einschränkung, dass $a \neq 0$ ist). Um den Umgang mit quadratischen Gleichungen zu lernen, werden oft (wie auch in diesem Skriptum) vorwiegend Beispiele herangezogen, bei denen die Koeffizienten ganzzahlig sind. Das soll Ihnen helfen, sich auf die wesentlichen Aspekte zu konzentrieren, muss aber in praktischen Anwendungen nicht unbedingt der Fall sein. Weiters werden wir die Variable meist mit dem Symbol x bezeichnen, was keineswegs verpflichtend ist[3].

Werden beide Seiten einer quadratischen Gleichung der Form (1.1) durch den Koeffizienten des führenden Glieds, d.h. durch a, dividiert (was eine Äquivalenzumformung ist, da $a \neq 0$ ist), so nimmt sie die Form

$$x^2 + p\,x + q = 0 \tag{1.6}$$

an, wobei nun die Koeffizienten p und q reelle Zahlen sind[4]. Der Koeffizient von x^2 ist gleich 1. Quadratische Gleichungen werden oft in dieser Form angeschrieben – sie wird **Normalform** der quadratischen Gleichung genannt[5], da sie (unabhängig davon, wie die ursprüngliche Gleichung ausgesehen hat) *eindeutig* ist[6]. Werden beispielsweise beide Seiten von (1.3) durch 2 dividiert, so ergibt sich

$$x^2 + 3\,x - 4 = 0 \tag{1.7}$$

als ihre Normalform. Die Gleichungen (1.2), (1.3) und (1.7) sind zueinander äquivalent, da sie mit Hilfe von Äquivalenzumformungen ineinander verwandelt werden können. Sie haben alle die gleiche Lösungsmenge.

Haben wir es mit der Gleichung

$$3\,x^2 + 4\,x + 7 = 0 \tag{1.8}$$

[3] Um diese beiden Punkte zu illustrieren:

$$\pi^3\,\omega^2 - \frac{2\,\omega}{7} + \frac{23\,\pi\sqrt{2}}{24} = 0 \tag{1.5}$$

ist eine quadratische Gleichung in der Variable ω („Omega“) mit den (nicht-ganzzahligen) Koeffizienten $a = \pi^3$, $b = -\frac{2}{7}$ und $c = \frac{23\,\pi\sqrt{2}}{24}$.

[4] Es gilt dann $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$.

[5] Man nennt sie auch die pq-Form, während (1.1) als abc-Form bezeichnet werden kann.

[6] In diesem Sinn lässt sich *jede* quadratische Geichung – bis auf Äquivalenzumformungen, die ja die Lösungsmenge nicht verändern – durch zwei Zahlen p und q charakterisieren.

zu tun (sie ist vom Typ (1.1) mit $a = 3$, $b = 4$ und $c = 7$), so kann sie (indem beide Seiten durch 3 dividiert werden) in die Normalform

$$x^2 + \frac{4}{3}\,x + \frac{7}{3} = 0 \tag{1.9}$$

gebracht werden (also auf die Form (1.6) mit $p = \frac{4}{3}$ und $q = \frac{7}{3}$). Das zeigt einen möglichen Nachteil der Normalform auf: Während die Koeffizienten in (1.8) ganze Zahlen sind, treten in (1.9) Bruchzahlen auf. Welche dieser beiden Formen als die einfachere betrachtet werden soll und sich besser zum Weiterrechnen eignet, ist in gewisser Weise Geschmackssache (und im konkreten Fall Ihnen überlassen). *Allgemeinen* Überlegungen wird meist die Normalform zugrunde gelegt, da es hier nur *zwei* frei zu wählende Koeffizienten p und q gibt, während es in der Form (1.1) mit a, b und c *drei* sind.

Ein besonders einfacher Typ quadratischer Gleichungen ist dadurch charakterisiert, dass der Koeffizient der ersten Potenz von x gleich 0 ist, d.h. dass $b = 0$ in (1.1) bzw. $p = 0$ in (1.6) ist. Ein Beispiel:

$$2\,x^2 - 5 = 0. \tag{1.10}$$

Ein anderer einfacher Typ ist dadurch charakterisiert, dass das konstante Glied verschwindet, d.h. dass $c = 0$ in (1.1) bzw. $q = 0$ in (1.6) ist. Ein Beispiel:

$$4\,x^2 + 3\,x = 0. \tag{1.11}$$

Bevor wir quadratische Gleichungen ganz allgemein betrachten (und lösen), sehen wir uns zum Aufwärmen diese beiden einfachen Typen näher an.

2 Quadratische Gleichungen vom Typ $a\,x^2 + c = 0$

Eine quadratische Gleichung, in der der Koeffizient der ersten Potenz der Variable x verschwindet, ist leicht zu lösen. Betrachten wir als Beispiel die Gleichung

$$x^2 - 9 = 0. \tag{2.1}$$

Da wir 9 als 3^2 schreiben können, folgt mit Hilfe der dritten binomischen Formel $x^2 - 9 = (x + 3)\,(x - 3)$. Gleichung (2.1) besagt daher nichts anderes als

$$(x + 3)\,(x - 3) = 0. \tag{2.2}$$

Ist x eine Lösung, so bedeutet das, dass das Produkt der beiden Zahlen $x + 3$ und $x - 3$ gleich 0 ist. Nun kann das Produkt zweier Zahlen nur dann 0 sein, wenn (zumindest) eine von ihnen gleich 0 ist. Daher gilt entweder $x + 3 = 0$ (d.h. $x = -3$) oder $x - 3 = 0$ (d.h. $x = 3$). Die Probe ergibt, dass sowohl -3 als auch 3 die Gleichung erfüllen, da $(-3)^2 = 3^2 = 9$ gilt. Die Gleichung (2.1) besitzt daher (genau) zwei Lösungen, -3 und 3, die wir durch die Schreibweise ± 3 (ausgesprochen „plus-minus 3") zusammenfassen können. Die Lösungsmenge ist $L = \{-3, 3\}$.

Wir können Gleichung (2.1) auch in der Form

$$x^2 = 9 \tag{2.3}$$

anschreiben. Ist dann x nicht gleich der Wurzel aus 9? Wie das Argument, das zur Lösungsmenge geführt hat, zeigt, kann man hier nicht einfach $x = \sqrt{9} = 3$ schließen, sondern muss auch die negative Lösung, d.h. die Möglichkeit, dass $x = -\sqrt{9} = -3$ ist, berücksichtigen.

Diese letzte Beobachtung ist sehr wichtig! Ganz allgemein gilt: Ist d eine positive Zahl, so folgt aus $x^2 = d$, dass entweder $x = \sqrt{d}$ oder $x = -\sqrt{d}$. Es gilt auch die Umkehrung: Sowohl das Quadrat von $\sqrt{d}$ als auch jenes von $-\sqrt{d}$ ist gleich d. Formal angeschrieben gilt also für jedes $d > 0$:

$$x^2 = d \quad \Leftrightarrow \quad x = -\sqrt{d} \quad \text{oder} \quad x = \sqrt{d}\,. \tag{2.4}$$

Merken Sie sich das bitte! Einer solchen Situation werden wir auch bei der Behandlung der allgemeinen quadratischen Gleichung begegnen.

Ein anderes Beispiel des Typs $a\,x^2 + c = 0$ ist die Gleichung

$$x^2 + 9 = 0. \tag{2.5}$$

Für sie tritt ein anderer Lösungsfall ein: Da $x^2 \geq 0$ für jedes reelle x, kann $x^2 + 9$ nicht 0 sein. Daher besitzt die Gleichung (2.5) keine Lösung. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\,\}$.

Als drittes Beispiel des Typs $a\,x^2 + c = 0$ betrachten wir die Gleichung

$$x^2 = 0. \tag{2.6}$$

Ist $x^2 = 0$, so muss $x = 0$ sein. Diese Gleichung besitzt daher nur eine einzige Lösung, nämlich 0. Die Lösungsmenge ist $L = \{0\}$.

Die drei Beispiele (2.1), (2.5) und (2.6) stecken ab, welche Lösungsmengen uns bei Gleichungen der Form $a\,x^2 + q = 0$ begegnen können: Es kann zwei, eine oder gar keine Lösung geben.

In den bisherigen Beispielen war zwar $a = 1$, aber auch wenn $a \neq 1$ ist, können wir eine solche Gleichung leicht lösen. Haben wir etwa die Gleichung

$$2\,x^2 - 9 = 0 \tag{2.7}$$

vor uns, so dividieren wir beide Seiten durch 2 und erhalten

$$x^2 - \frac{9}{2} = 0. \tag{2.8}$$

Daher gibt es zwei Lösungen[7]: $x = \pm\sqrt{\frac{9}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{2}$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\}$. Die Lösungen sind nun irrationale Zahlen. Wir geben sie am besten in der

[7] Im letzten Schritt wird „der Nenner rational gemacht“. Da $(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$ ist, können wir $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ schreiben. Merken Sie sich diesen Trick!

symbolisch-exakten Form an. Sollten Sie (etwa im Rahmen einer praktischen Anwendung) Zahlenwerte in Dezimaldarstellung benötigen, so berechnen Sie (etwa mit dem Taschenrechner) numerische *Näherungswerte* mit einer der Anwendung angemessenen Genauigkeit, beispielsweise $\frac{3\sqrt{2}}{2} \approx 2.12$. Sie können dann die Lösungen *näherungsweise* in der Form $x \approx \pm 2.12$ angeben.

Wir fassen unsere bisherigen Erkenntnisse zusammen: Für eine Gleichung der Form $a\,x^2+c=0$ (mit $a \neq 0$, was immer vorausgesetzt ist) tritt stets einer der folgenden Lösungsfälle ein:

- Ist $c \neq 0$ und haben a und c verschiedene Vorzeichen, so gibt es (genau) zwei Lösungen, nämlich $x = \pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$.
- Ist $c = 0$, so gibt es (genau) eine Lösung, nämlich $x = 0$.
- Ist $c \neq 0$ und haben a und c das gleiche Vorzeichen, so gibt es keine Lösung.

3 Quadratische Gleichungen vom Typ $a\,x^2 + b\,x = 0$

Eine Gleichung vom Typ $a\,x^2 + b\,x = 0$ (mit $a \neq 0$) kann durch Herausheben eines Faktors x auf der linken Seite in der Form

$$x\,(a\,x + b) = 0 \tag{3.1}$$

angeschrieben werden. Ist x eine Lösung, so bedeutet das, dass das Produkt der beiden Zahlen x und $a\,x+b$ gleich 0 ist. Wieder verwenden wir die Tatsache, dass das Produkt zweier Zahlen nur dann 0 ist, wenn (zumindest) eine von ihnen gleich 0 ist. Daher gilt entweder $x = 0$ oder $a\,x + b = 0$ (d.h. $x = -\frac{b}{a}$). Haben Gleichungen dieses Typs daher stets zwei Lösungen? Nicht immer! Aufgepasst:

- Ist $b \neq 0$, so gibt es tatsächlich zwei Lösungen (nämlich 0 und $-\frac{b}{a}$).
- Ist aber $b = 0$, so „fallen die beiden Lösungen zusammen“, d.h. es gibt dann nur eine einzige Lösung, nämlich 0.

Hier ein Beispiel: Um die Gleichung $7\,x^2 + 3\,x = 0$ zu lösen, schreiben wir sie in der Form

$$x\,(7\,x + 3) = 0 \tag{3.2}$$

an, woraus unmittelbar folgt, dass entweder $x = 0$ oder $7\,x + 3 = 0$ (also $x = -\frac{3}{7}$) gilt. Die beiden Lösungen sind daher 0 und $-\frac{3}{7}$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{3}{7}, 0\}$.

4 Allgemeine quadratische Gleichungen und die „kleine Lösungsformel“

Nachdem wir uns nun anhand zweier einfacher Typen quadratischer Gleichungen über die auftretenden Lösungsfälle orientiert haben, kommen wir zur allgemeinen Form (1.1) bzw. (1.6) zurück. Wie können solche Gleichungen gelöst werden? Betrachten wir zunächst das Beispiel (1.7)

$$x^2 + 3\,x - 4 = 0. \tag{4.1}$$

Können wir hier in irgendeinem Sinn „die Wurzel ziehen“? Dazu müssten wir die linke Seite oder einen Teil der linken Seite als Quadrat schreiben. Hier kommen uns die binomischen Formeln zu Hilfe. Machen wir einen Versuch:

$$(x+3)^2 = x^2 + 6\,x + 9. \tag{4.2}$$

Dieser Term beginnt mit $x^2 + 6\,x$, aber wir hätten gern einen Term, der mit $x^2 + 3\,x$ beginnt. Also zweiter Versuch:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = x^2 + 3\,x + \frac{9}{4}\,. \tag{4.3}$$

Bingo! Diese Identität weist uns den Weg: Wir addieren zunächst 4 zu beiden Seiten von (4.1), um die 4 auf die rechte Seite zu bekommen:

$$x^2 + 3\,x = 4. \tag{4.4}$$

Um nun auf der linken Seite einen Summanden $\frac{9}{4}$ zu bekommen, addieren wir[8] auf beiden Seiten $\frac{9}{4}$ und erhalten

$$x^2 + 3\,x + \frac{9}{4} = 4 + \frac{9}{4} \tag{4.5}$$

oder, mit vereinfachter rechter Seite,

$$x^2 + 3\,x + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}\,. \tag{4.6}$$

Die linke Seite können wir nun mit (4.3) als Quadrat schreiben:

$$\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}\,. \tag{4.7}$$

Diese Gleichung, die äquivalent zu (4.1) ist, besagt, dass das Quadrat von $x + \frac{3}{2}$ gleich $\frac{25}{4}$ ist. Nun erinnern wir uns an die früher gemachte Beobachtung (2.4), und es wird klar, warum sie für quadratische Gleichungen ganz allgemein wichtig ist. Denn mit ihrer Hilfe folgt, dass $x + \frac{3}{2}$ entweder gleich der Wurzel aus $\frac{25}{4}$, also $\frac{5}{2}$, oder minus der Wurzel aus $\frac{25}{4}$, also $-\frac{5}{2}$ ist. Wir schreiben das in der Form

$$x + \frac{3}{2} = \pm\frac{5}{2} \tag{4.8}$$

an, wobei das doppelte Vorzeichen als „entweder $+$ oder $-$“ zu lesen ist. Subtrahieren wir auf beiden Seiten $\frac{3}{2}$, so erhalten wir mit

$$x = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \tag{4.9}$$

zwei Lösungen, nämlich

$$x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4 \tag{4.10}$$

[8] Diese Methode heißt „Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat“, da $x^2 + 3\,x$ um $\frac{9}{4}$ auf das vollständige Quadrat $\left(x + \frac{3}{2}\right)^2$ ergänzt wird.

und

$$x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1. \tag{4.11}$$

Insgesamt haben wir also gezeigt: Ist x eine Lösung von (4.1), so ist entweder $x = -4$ oder $x = 1$. Wenn Sie die Argumentation noch einmal Schritt für Schritt genau durchgehen, so erkennen Sie, dass sich alle Schritte rückgängig machen lassen. Daher haben wir die (beiden) Lösungen gefunden. Die Lösungsmenge ist $L = \{-4, 1\}$.

Dieses Verfahren kann auch auf die **allgemeine Normalform** (1.6) der quadratischen Gleichung angewandt werden, wobei sich aber beim "Wurzelziehen" auch andere Lösungsfälle ergeben können. Wir beginnen die Argumentation für den allgemeinen Fall ganz analog zum vorigen Beispiel und schreiben zunächst die binomische Formel

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = x^2 + p\,x + \frac{p^2}{4} \tag{4.12}$$

an. Dieser Ausdruck beginnt genau mit dem Term $x^2 + p\,x$, der auch in der allgemeinen Normalform (1.6) aufscheint! Wenn wir also (1.6) durch Subtraktion von q in die Form

$$x^2 + p\,x = -q \tag{4.13}$$

bringen, auf beiden Seiten $\frac{p^2}{4}$ addieren und (4.12) verwenden, erhalten wir die zu (1.6) äquivalente Gleichung

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q. \tag{4.14}$$

Bisher ist alles ganz analog zum zuvor diskutierten Beispiel (4.1) verlaufen. Hier jedoch müssen wir **drei Lösungsfälle** unterscheiden: Die rechte Seite, $\frac{p^2}{4} - q$, die sogenannte **Diskriminante** der Gleichung, kann positiv, 0 oder negativ sein:

- Fall $\frac{p^2}{4} - q > 0$:
  In diesem Fall können wir die „Wurzel ziehen“, müssen aber – siehe wieder (2.4)! – auch die negative Lösung berücksichtigen. Es gilt dann

  $$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \tag{4.15}$$

  wobei das doppelte Vorzeichen als „entweder $+$ oder $-$“ gelesen werden muss. Daher gibt es zwei Lösungen

  $$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,, \tag{4.16}$$

  wobei x_1 mit einem der beiden Vorzeichen und x_2 mit dem anderen berechnet wird.

- Fall $\frac{p^2}{4} - q = 0$:
  In diesem Fall reduziert sich unsere Gleichung auf $\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = 0$, woraus folgt $x + \frac{p}{2} = 0$. Daher gibt es nur eine Lösung,

  $$x = -\frac{p}{2}\,. \tag{4.17}$$

- Fall $\frac{p^2}{4} - q < 0$:
  In diesem Fall impliziert unsere Gleichung, dass das Quadrat von $x + \frac{p}{2}$ negativ sein müsste. Da ein Quadrat (im Rahmen der reellen Zahlen) aber nicht negativ sein kann, gibt es keine Lösung.

Damit haben wir nicht nur die drei möglichen Lösungsfälle gefunden, sondern mit (4.16), der sogenannten **kleinen Lösungsformel**, einen handlichen Ausdruck für die zwei Lösungen, die im Fall positiver Diskriminante existieren.

In der Praxis wird nicht zuerst das Vorzeichen der Diskriminante bestimmt, sondern (pragmatisch) sogleich p und q in die kleine Lösungsformel (4.16) eingesetzt. Die Diskriminante ist dann die Zahl, die unter dem Wurzelzeichen steht. Ist sie positiv, so gibt es zwei Lösungen. Ist sie 0, so fallen die beiden Lösungen zusammen, und es gibt nur eine Lösung. Ist sie negativ, so gibt es keine Lösung.

Wir exerzieren das anhand einiger Beispiele durch:

- Wir betrachten die bereits oben ausführlich behandelte Gleichung (4.1)

  $$x^2 + 3\,x - 4 = 0 \tag{4.18}$$

  und lösen sie nun durch Einsetzen in die kleine Lösungsformel. Dazu lesen wir $p = 3$ und $q = -4$ ab und berechnen

  $$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 4} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{5}{2}\,. \tag{4.19}$$

  Es gibt also zwei Lösungen, $x_1 = -\frac{3}{2} - \frac{5}{2} = -\frac{8}{2} = -4$ und $x_2 = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = 1$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-4, 1\}$. Dieses Ergebnis haben wir bereits früher durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat erhalten. Der gesamte Lösungsweg, der sich zuvor von (4.1) bis (4.9) erstreckt hat, wird unter Benutzung der kleinen Lösungsformel in (4.19) nun in einer einzigen Zeile vollzogen!

- Um zu verdeutlichen, dass die Lösungen quadratischer Gleichungen nicht immer „schöne“ ganze Zahlen sind, betrachten wir die Gleichung

  $$x^2 + 3\,x - 1 = 0. \tag{4.20}$$

  Mit $p = 3$ und $q = -1$ ergeben sich die zwei Lösungen

  $$x_{1,2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} + 1} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\,, \tag{4.21}$$

  wobei wir im letzten Schritt benutzt haben, dass $\sqrt{\frac{13}{4}} = \frac{\sqrt{13}}{2}$ ist.

- Unser drittes Beispiel ist die Gleichung

  $$x^2 + 6\,x + 9 = 0. \tag{4.22}$$

Wir lesen $p = 6$ und $q = 9$ ab und schreiben mit diesen Werten die kleine Lösungsformel an[9]:

$$x_{1,2} = -\frac{6}{2} \pm \sqrt{\frac{6^2}{4} - 9} = -3 \pm \sqrt{\frac{36}{4} - 9} = -3 \pm \sqrt{9 - 9} = -3 \pm 0 = -3\,. \quad (4.23)$$

Sehen Sie, was passiert ist? Unter dem Wurzelsymbol hat sich 0 ergeben (d.h. die Diskriminante ist gleich 0), und daher gibt es nur die Lösung $x = -3$. Die Lösungsmenge ist $L = \{-3\}$. Wenn einem auffällt, dass die linke Seite von (4.22) nach der ersten binomischen Formel nichts anderes als $(x + 3)^2$ ist, dann ergibt sich diese Lösung auf einfachere Weise: $(x + 3)^2 = 0$ besagt das Gleiche wie $x + 3 = 0$, also $x = -3$.

- Unser viertes Beispiel ist die Gleichung

$$x^2 - 3\,x + 4 = 0. \quad (4.24)$$

Wir lesen $p = -3$ und $q = 4$ ab und schreiben mit diesen Werten die kleine Lösungsformel an:

$$x_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{3^2}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 4} = \frac{3}{2} \pm \sqrt{-\frac{7}{4}}\,. \quad (4.25)$$

Jetzt können wir aufhören, denn unter dem Wurzelsymbol steht eine negative Zahl (d.h. die Diskriminante ist negativ). Daher besitzt diese Gleichung keine reelle Lösung. Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\,\}$.

5 Die „große Lösungsformel"

Ist eine quadratische Gleichung nicht in Normalform (1.6), sondern in der Form (1.1) mit $a \neq 1$ gegeben, so gibt es zwei Möglichkeiten:

- Erste Möglichkeit: Die Gleichung wird durch Division beider Seiten durch a in die Normalform gebracht, und es wird die kleine Lösungsformel (4.16) angewandt.
- Zweite Möglichkeit: Es wird die sogenannte **große Lösungsformel**

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} \quad (5.1)$$

benutzt. Sie ergibt sich aus der kleinen Lösungsformel (4.16), indem $p = \frac{b}{a}$ und $q = \frac{c}{a}$ gesetzt wird:

$$\begin{aligned} x_{1,2} &= -\frac{b}{2\,a} \pm \sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{c}{a}} = -\frac{b}{2\,a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4\,a^2} - \frac{4\,a\,c}{4\,a^2}} = \\ &= -\frac{b}{2\,a} \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4\,a\,c}{4\,a^2}} = -\frac{b}{2\,a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a} = \\ &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\,a\,c}}{2\,a}\,. \end{aligned} \quad (5.2)$$

[9] Dass die Schreibweise $x_{1,2}$ hier eigentlich nicht gerechtfertigt ist, da es ja nur *eine* Lösung gibt (was wir aber erst *danach* bemerken), nehmen wir bei dieser schnellen Lösungsmethode in Kauf.

Als Diskriminante, die über die Anzahl der Lösungen entscheidet, dient nun die Kombination $b^2 - 4\,a\,c$. (Bei genauer Betrachtung dieser Rechnung wird Ihnen vielleicht aufgefallen sein, dass in der zweiten Zeile im Nenner die Wurzel aus $4\,a^2$ gezogen wurde. Je nach dem Vorzeichen von a ist $\sqrt{4\,a^2}$ entweder $2\,a$ oder $-2\,a$. Wir haben dafür einfach $2\,a$ geschrieben, da vor dem betreffenden Bruch ohnehin das Doppelvorzeichen $\pm$ steht.)

Sollen wir nun beispielsweise die Gleichung

$$3\,x^2 - 2\,x - 7 = 0 \tag{5.3}$$

lösen, so ist die Benutzung der großen Lösungsformel eine Option: Mit $a = 3$, $b = -2$ und $c = -7$ berechnen wir

$$x_{1,2} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-7)}}{2 \cdot 3} = \frac{2 \pm \sqrt{88}}{6} = \frac{1 \pm \sqrt{22}}{3}\,, \tag{5.4}$$

wobei zur Vereinfachung benutzt wurde, dass $\sqrt{88} = \sqrt{4 \cdot 22} = 2\sqrt{22}$ gilt.

Die beiden Lösungsformeln (von denen Sie zumindest eine **auswendig kennen** sollten) können auf *alle* quadratischen Gleichungen angewandt werden. Ihre Anwendung auf Gleichungen vom Typ $a\,x^2 + c = 0$ und $a\,x^2 + b\,x = 0$, die wir bereits besprochen haben, bedeutet allerdings, mit Kanonen auf Spatzen zu schießen.

6 Ein praktisches Beispiel

Als praktisches Anwendungsbeispiel einer quadratischen Gleichung gehen wir von der Faustformel für den – in Meter gemessenen – Anhalteweg beim Autofahren

$$\text{Anhalteweg} = \frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} \tag{6.1}$$

aus. Dabei ist v die in $\mathrm{km/h}$ angegebene Geschwindigkeit beim Erkennen eines Hindernisses. Bei welcher Geschwindigkeit ist der Anhalteweg gleich $40\,\mathrm{m}$? Die Geschwindigkeit, für die das der Fall ist, muss die Gleichung

$$\frac{v^2}{100} + \frac{3\,v}{10} = 40 \tag{6.2}$$

erfüllen – das ist unser Beispiel einer in der Praxis auftretenden quadratischen Gleichung! Die Variable heißt jetzt v, was uns aber nicht stören sollte. Als Grundmenge legen wir die Menge $\mathbb{R}^+$ aller positiven reellen Zahlen fest (da eine negative Lösung keine Bedeutung für die Fragestellung hätte). Um die Gleichung (6.2) zu lösen, schreiben wir sie zunächst gemäß dem folgenden „Protokoll" in die Normalform um:

$$\begin{aligned} \tfrac{v^2}{100} + \tfrac{3\,v}{10} &= 40 \quad &&|\ \cdot 100 \\ v^2 + 30\,v &= 4000 \quad &&|\ -4000 \\ v^2 + 30\,v - 4000 &= 0 \end{aligned} \tag{6.3}$$

Da nur Äquivalenzumformungen verwendet wurden, hat die letzte Gleichung die gleiche Lösungsmenge wie (6.2). Nun können wir die kleine Lösungsformel (mit $p = 30$ und $q = -4000$) anwenden:

$$v_{1,2} = -\frac{30}{2} \pm \sqrt{\frac{30^2}{4} + 4000} = -15 \pm \sqrt{225 + 4000} = -15 \pm \sqrt{4225} = -15 \pm 65. \quad (6.4)$$

Damit ergeben sich $v_1 = -15 - 65 = -80$ und $v_2 = -15 + 65 = 50$. Da v_1 nicht in der Grundmenge liegt, bleibt v_2 als einzige Lösung des Problems übrig: Damit der Anhalteweg $40\,\mathrm{m}$ ist, muss die Geschwindigkeit $50\,\mathrm{km/h}$ betragen. Soll etwa durch eine Geschwindigkeitsbeschränkung erreicht werden, dass der mit der Faustformel berechnete Anhalteweg $40\,\mathrm{m}$ nicht übersteigt, so muss die zulässige Höchstgeschwindigkeit mit $50\,\mathrm{km/h}$ festgesetzt werden.

7 Faktorisierung quadratischer Polynome

Im Zuge verschiedenster Berechnungen kann es nützlich sein zu wissen, ob (und wie) sich ein Polynom zweiten Grades (ein quadratisches Polynom) als Produkt von Linearfaktoren (d.h. als Produkt von Polynomen ersten Grades) schreiben lässt. Um ein Beispiel für eine solche Situation anzuführen, stellen wir uns vor, in einer Anwendung tritt die Notwendigkeit auf, den Bruchterm

$$\frac{x^2 + 3\,x - 4}{x - 1} \quad (7.1)$$

zu vereinfachen. Auf den ersten Blick ist nicht ersichtlich, ob man hier kürzen kann. Nun lässt sich der Zähler aber als Produkt zweier Linearfaktoren schreiben:

$$x^2 + 3\,x - 4 = (x + 4)\,(x - 1). \quad (7.2)$$

(Rechnen Sie nach!) Damit können wir tatsächlich vereinfachen:

$$\frac{x^2 + 3\,x - 4}{x - 1} = \frac{(x + 4)\,(x - 1)}{x - 1} = x + 4\,, \quad (7.3)$$

was für alle $x \neq 1$ gilt[10]. Damit ist die Nützlichkeit der Faktorisierung quadratischer Polynome illustriert. Aber welche Bewandtnis hat es mit der Identität (7.2)? Wie können wir eine solche Faktorisierung finden? Wir machen zunächst eine Beobachtung: Der Zähler des Bruchterms in (7.1) ist genau das Polynom, das in der quadratischen Gleichung (4.1) bzw. (4.18), die wir bereits (mit zwei verschiedenen Methoden) gelöst haben, auftritt. Die Lösungen dieser Gleichung sind -4 und 1, und diese beiden Zahlen treten (mit dem umgekehrten Vorzeichen) in den Linearfaktoren in (7.2) auf!

Hierbei handelt es sich um einen allgemeingültigen Zusammenhang. Er lautet:

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ zwei Lösungen x_1 und x_2, so gilt

$$x^2 + p\,x + q = (x - x_1)\,(x - x_2). \quad (7.4)$$

[10] Für $x = 1$ reduziert sich der Bruchterm auf $\frac{0}{0}$, ist also nicht definiert.

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ nur eine Lösung x_1, so gilt[11]

$$x^2 + p\,x + q = (x - x_1)^2. \tag{7.5}$$

- Besitzt die quadratische Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ keine Lösung, so lässt sich das Polynom $x^2 + p\,x + q$ nicht als Produkt von Linearfaktoren schreiben[12].

Diese Aussagen können durch eine Rechnung und ein kleines Argument bewiesen werden:

Beweis: In den ersten beiden Fällen sind die Lösungen durch die kleine Lösungsformel gegeben, wobei die Diskriminante $\frac{p^2}{4} - q$ im ersten Fall positiv, im zweiten Fall gleich 0 ist. Wir fassen beide Fälle zusammen: Mit

$$x_1 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \quad \text{und} \quad x_2 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} \tag{7.6}$$

berechnen wir

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = \left(x + \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(x + \frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right). \tag{7.7}$$

Mit Hilfe der dritten binomischen Formel[13] formen wir dies zu

$$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p^2}{4} - q\right) \tag{7.8}$$

um, multiplizieren das Quadrat aus und erhalten

$$x^2 + p\,x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = x^2 + p\,x + q. \tag{7.9}$$

Insgesamt haben wir damit gezeigt, dass $(x - x_1)\,(x - x_2) = x^2 + p\,x + q$ gilt. Gibt es nur eine Lösung, so ist $x_2 = x_1$ und daher $(x - x_1)\,(x - x_2) = (x - x_1)^2$.

Zuletzt betrachten wir den Fall, dass die Gleichung $x^2 + p\,x + q = 0$ keine Lösung besitzt. Wäre es möglich, $x^2 + p\,x + q$ als Produkt von Linearfaktoren zu schreiben, d.h. als Produkt der Form $(x - \text{Zahl}_1)\,(x - \text{Zahl}_2)$, so wäre es für $x = \text{Zahl}_1$ und für $x = \text{Zahl}_2$ gleich 0, was der Annahme widerspricht, dass es *keine* Zahl x gibt, für die $x^2 + p\,x + q = 0$ gilt. Daher kann es in diesem Fall keine Faktorisierung geben.

[11] Dieser zweite Fall ist gewissermaßen ein Spezialfall des ersten, wenn die beiden Lösungen zusammenfallen.

[12] Diese Aussage gilt nur im Rahmen der reellen Zahlen, auf die wir uns in diesem Skriptum beschränken. Im Rahmen der erweiterten Zahlenmenge der *komplexen Zahlen* besitzt jede quadratische Gleichung zumindest eine Lösung, sodass dieser dritte Fall dann nicht auftritt.

[13] Wir denken uns die dritte binomische Formel in der Form $(A + B)\,(A - B) = A^2 - B^2$ angeschrieben (mit Großbuchstaben, da die Symbole a und b in diesem Skriptum bereits für andere Zwecke reserviert sind) und setzen $A = x + \frac{p}{2}$ und $B = \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Zur Überprüfung unserer Überlegungen bemerken wir, dass die Faktorisierungen (7.4) und (7.5) sofort auf die Lösungen der zugehörigen quadratischen Gleichung führen: Ist $(x-x_1)\,(x-x_2) = 0$, so gilt entweder $x - x_1 = 0$ (also $x = x_1$) oder $x - x_2 = 0$ (also $x = x_2$). Ist $(x - x_1)^2 = 0$, so folgt $x - x_1 = 0$ (also $x = x_1$). Es passt also alles wunderbar zusammen!

Damit ist **das Problem der Faktorisierung quadratischer Polynome allgemein gelöst**! Unsere Argumente waren zwar auf quadratische Gleichungen zugeschnitten, die in Normalform (1.6) vorliegen, aber wie wir bereits wissen, kann jede in der Form (1.1) gegebene quadratische Gleichung in Normalform gebracht werden, indem beide Seiten durch a dividiert werden.

Betrachten wir noch ein konkretes Beispiel: Um herauszufinden, ob das Polynom

$$x^2 - 5\,x + 3 \tag{7.10}$$

faktorisiert werden kann und, falls ja, wie die Faktoren aussehen, lösen wir die Gleichung

$$x^2 - 5\,x + 3 = 0. \tag{7.11}$$

Die Lösungen sind (rechnen Sie selbst nach!) $x_{1,2} = \frac{5\pm\sqrt{13}}{2}$. Daher gilt

$$x^2 - 5\,x + 3 = \left(x - \frac{5 - \sqrt{13}}{2}\right)\left(x - \frac{5 + \sqrt{13}}{2}\right). \tag{7.12}$$

In diesem Beispiel sind die Koeffizienten der Linearfaktoren keine ganzen Zahlen, was uns aber in grundsätzlicher Hinsicht nicht stören muss.

Der Zusammenhang zwischen Faktorisierung und quadratischen Gleichungen erlaubt es uns, quadratische Gleichungen mit *vorgegebenen* Lösungen sofort anzuschreiben. Soll eine quadratische Gleichung etwa die Lösungen 2 und 3 besitzen, so multiplizieren wir $(x - 2)\,(x - 3) = x^2 - 5\,x + 6$. Die gesuchte quadratische Gleichung lautet daher (in Normalform) $x^2 - 5\,x + 6 = 0$. (Auf diese Weise werden ohne große Mühe Übungsaufgaben zum Lösen quadratischer Gleichungen entworfen, bei denen sichergestellt ist, dass die Lösungen „schöne“ ganze Zahlen sind!)

8 Satz von Vieta

Eine mit der Faktorisierung eng zusammenhängende Beziehung zwischen den Lösungen x_1 und x_2 einer quadratischen Gleichung und den Koeffizienten p und q ihrer Normalform ist der sogenannte **Satz von Vieta**[14]. Er besagt, dass

$$x_1 + x_2 = -p \tag{8.1}$$

und

$$x_1\,x_2 = q. \tag{8.2}$$

[14] Auch „Wurzelsatz von Vieta“ genannt.

Beweis: Der Satz kann auf zwei Arten bewiesen werden. Die kürzere und elegantere Version verwendet die Faktorisierung (7.4) und besteht nur aus der Rechnung

$$(x - x_1)\,(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1\,x_2. \tag{8.3}$$

Durch Vergleich mit der Form $x^2 + p\,x + q$ ergeben sich sofort (8.1) und (8.2).

Man kann aber auch die kleine Lösungsformel für x_1 und x_2 benutzen, um (8.1) und (8.2) explizit nachzurechnen. Beweis von (8.1):

$$x_1 + x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} - \frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = -\frac{p}{2} - \frac{p}{2} = -p. \tag{8.4}$$

Beweis von (8.2):

$$\begin{aligned} x_1\,x_2 \;&=\; \left(-\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right)\left(-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\right) = \\ &= \frac{p^4}{4} - \left(\frac{p^4}{4} - q\right) = q, \end{aligned} \tag{8.5}$$

wobei hier wieder die dritte binomische Formel benutzt wurde.

Mit Hilfe der beiden Formeln (8.1) und (8.2) können aus den Lösungen einer quadratischen Gleichung sofort die Koeffizienten p und q ermittelt werden. Der Satz gilt auch für den Fall, dass es nur eine Lösung gibt, d.h. dass die Lösungen zusammenfallen. Es ist dann $x_2 = x_1$ zu setzen.

Umgekehrt ergibt sich mit dem Satz von Vieta eine nette Deutung einer quadratischen Gleichung als eine Art *Denksportaufgabe*. Beispielsweise lautet er für die Gleichung (4.1) bzw. (4.18), mit $p = 3$ und $q = -4$,

$$x_1 + x_2 \;=\; -3 \tag{8.6}$$

$$x_1\,x_2 \;=\; -4. \tag{8.7}$$

Die Lösungen zu finden ist gleichbedeutend mit der Aufgabe „Sag mir zwei Zahlen, deren Summe -3 ist und deren Produkt -4 ist!“. Mit ein bisschen Probieren geht das in diesem einfachen Fall auch im Kopf: Die gesuchten Zahlen sind -4 und 1, genau die bereits auf andere Art gefundenen Lösungen!

Damit kann auch für andere quadratische Gleichungen durch Kopfrechnen versucht werden, ganzzahlige Lösungen zu finden (die es natürlich nicht immer geben muss), und umgekehrt fällt – wenn die Lösungen bekannt sind – die Probe leicht, da man die Lösungen nur addieren und multiplizieren muss.

9 Gleichungen, die auf quadratische Gleichungen zurückgeführt werden können

Manche Gleichungen, die auf den ersten Blick kompliziert aussehen, lassen sich auf quadratische Gleichungen zurückführen. Ein Beispiel ist die Gleichung

$$x^4 + 3\,x^2 - 4 = 0. \tag{9.1}$$

Eine Gleichung vierten Grades! Wenn Sie sie genau ansehen, werden Sie bemerken, dass nur gerade Potenzen von x auftreten. Wenn wir die Abkürzung

$$y = x^2 \tag{9.2}$$

vereinbaren, nimmt sie die Form

$$y^2 + 3\,y - 4 = 0 \tag{9.3}$$

an. Eine alte Bekannte – siehe (1.7), (4.1) und (4.18)! Dass die Variable jetzt y heißt, stecken wir locker weg. Sie besitzt, wie bereits mehrfach berechnet, zwei Lösungen, nämlich -4 und 1. Das bedeutet jetzt (mit dem richtigen Variablennamen angeschrieben): $y = -4$ und $y = 1$. Nun bedenken wir, dass y gemäß (9.2) nur die abgekürzte Schreibweise für x^2 ist. Es gibt also zwei Möglichkeiten, dass x die ursprüngliche Gleichung (9.1) erfüllt: $x^2 = -4$ und $x^2 = 1$. Das sind jetzt *zwei* quadratische Gleichungen, und *jede* Lösung (zumindest) *einer* dieser beiden Gleichungen ist eine Lösung von (9.1). Sehen wir uns die beiden Gleichungen an:

- Die Gleichung $x^2 = -4$ besitzt klarerweise keine (reelle) Lösung.
- Die Gleichung $x^2 = 1$ besitzt die zwei Lösungen $x = \pm 1$.

Damit ist (9.1) gelöst: Die Lösungsmenge ist $L = \{-1, 1\}$.

10 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3\,x^2 - 5 = 0$
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = \{-\sqrt{\frac{5}{3}}, \sqrt{\frac{5}{3}}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^2 - 2\,x = 0$
  Lösung:

  Die Lösungsmenge ist $L = \{0, 2\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat:

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, 3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung durch Ergänzen auf ein vollständiges Quadrat:

$$z^2 - 4\,z + 4 = 0$$

Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{2\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^2 - 2\,x - 8 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, 4\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $3\,u^2 - 7\,u - 6 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-\frac{2}{3}, 3\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $4\,x^2 - 4\,x + 1 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{1}{2}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $w^2 + 5\,w - 3 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{-5-\sqrt{37}}{2}, \frac{-5+\sqrt{37}}{2}\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $s^2 + 5\,s + 7 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist leer: $L = \{\,\}$.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $4\,x^2 + x - 1 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{\frac{-1-\sqrt{17}}{8}, \frac{-1+\sqrt{17}}{8}\}$.

- Bei welcher Geschwindigkeit ergibt sich nach der Faustformel (6.1) ein Anhalteweg von $88\,\mathrm{m}$?
Lösung:

Bei einer Geschwindigkeit von $80\,\mathrm{km/h}$.

- Bei welcher Geschwindigkeit ergibt sich nach der Faustformel (6.1) ein Anhalteweg von $100\,\mathrm{m}$? Runden Sie das Ergebnis sinnvoll!
Lösung:

Bei einer Geschwindigkeit von $86.1\,\mathrm{km/h}$.

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 + x - 20$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!
Lösung:

$$x^2 + x - 20 = (x + 5)\,(x - 4).$$

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2 + x + 20$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!
Lösung:

Das Polynom lässt sich nicht faktorisieren.

- Finden Sie heraus, ob das Polynom $x^2+x+\frac{1}{4}$ als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!
Lösung:

$$x^2 + x + \tfrac{1}{4} = \left(x + \tfrac{1}{2}\right)^2.$$

- Finden Sie heraus, ob das Polynom x^2-x-7 als Produkt von Linearfaktoren geschrieben werden kann, und, falls ja, finden Sie diese Faktoren!
Lösung:

$$x^2 - x - 7 = \left(x - \tfrac{1-\sqrt{29}}{2}\right)\left(x - \tfrac{1+\sqrt{29}}{2}\right).$$

- Lösen Sie die Gleichung $x^2 - 3\,x + 2 = 0$ im Kopf unter Zuhilfenahme des Satzes von Vieta!
Lösung:

Die Summe der Lösungen muss 3 sein, ihr Produkt 2.
Die Lösungen sind 1 und 2.

- Lösen Sie die folgende Gleichung: $x^4 - 7\,x^2 + 12 = 0$
Lösung:

Die Lösungsmenge ist $L = \{-2, -\sqrt{3}, \sqrt{3}, 2\}$.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Mai 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2021 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.