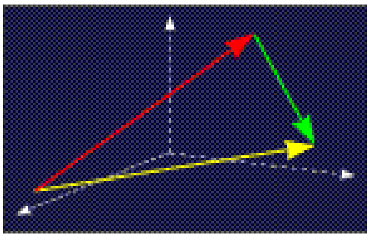
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Lineare Funktionen und ihre Graphen

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum behandelt die Funktionsterme und Graphen linearer Funktionen und geht auf die Begriffe Änderungsrate und Anstieg (Steigung) ein.

1 Lineare Funktionen

Eine reelle **lineare Funktion** ist eine reelle Funktion, deren Zuordnungsvorschrift vom Typ

$$x \mapsto k\,x + d \tag{1.1}$$

ist, wobei k und d fix vorgegebene reelle Zahlen (Konstanten[1]) sind. Ist $d = 0$, so wird die Funktion **linear-homogen**, ansonsten **linear-inhomogen** genannt[2]. Die größtmögliche Definitionsmenge einer reellen linearen Funktion ist ganz $\mathbb{R}$. Bei Bedarf kann die Definitionsmenge natürlich als echte Teilmenge von $\mathbb{R}$ festgelegt werden.

Eine lineare Funktion mit $k = 0$ ist konstant. Eine lineare Funktion mit $k \neq 0$ (wir wollen sie im Folgenden f nennen) stellt eine bestimmte Form der Zu- bzw. Abnahme dar, die folgendermaßen charakterisiert werden kann: Wir setzen uns gedanklich an eine beliebige Stelle x_0 und rücken von dort um eine Strecke $\Delta x > 0$ vor, betrachten also auch die Stelle $x_0 + \Delta x$.

> **Anmerkung zur Bezeichnung von Änderungen**: Um Änderungen auszudrücken, wird in der Mathematik und in angewandten Wissenschaften oft das Symbol Δ (ein großes griechisches „Delta") verwendet. Δx bezeichnet hier also die Differenz „neue Stelle minus alte Stelle". Die „alte Stelle" ist x_0, die „neue Stelle" ist $x_0 + \Delta x$. Deren Differenz ist klarerweise Δx.

[1] Auch *Parameter* genannt.

[2] Das Wort „linear" wird in der Mathematik leider ein bisschen uneinheitlich verwendet. In manchen Teilgebieten (wie der linearen Algebra) versteht man darunter das, was wir hier als „linear-homogen" bezeichnen.

Die Funktionswerte an diesen beiden Stellen sind[3]

$$f(x_0) = k\,x_0 + d \tag{1.2}$$
$$f(x_0 + \Delta x) = k\,(x_0 + \Delta x) + d \tag{1.3}$$

und können miteinander verglichen werden. Ihre Differenz ist[4]

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\,(x_0 + \Delta x) + d - k\,x_0 - d = k\,\Delta x, \tag{1.4}$$

woraus folgt

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + k\,\Delta x. \tag{1.5}$$

Wird von einer beliebigen Stelle x_0 zu einer (neuen, größeren) Stelle $x_0 + \Delta x$ übergegangen, so erhält man den neuen Funktionswert, indem zum alten Funktionswert $k\,\Delta x$ addiert wird[5]. Das bedeutet:

- Ist $k > 0$, so vergrößert sich der Funktionswert beim Übergang von x_0 zu $x_0 + \Delta x$ (d.h. beim „Vorrücken um Δx") um den konstanten Wert $k\,\Delta x$, und zwar egal, von welchem x_0 man ausgegangen ist.
- Ist $k < 0$, so ändert sich der Funktionswert beim Übergang von x_0 zu $x_0 + \Delta x$ (d.h. beim „Vorrücken um Δx") um den konstanten Wert $k\,\Delta x$, was jetzt einer Verkleinerung entspricht, da ja $k\,\Delta x < 0$ ist. Auch das gilt immer, gleichgültig, von welchem x_0 man ausgegangen ist.

Die Begiffe „vorrücken", „neuer Funktionswert", „Vergrößerung" und „Verkleinerung" werden besonders deutlich, wenn man sich vorstellt, dass die Variable x die Zeit darstellt und die Funktion f einen zeitlichen Verlauf modelliert.

> Hier ein konkretes **Beispiel**, das dieses Verhalten verdeutlicht: Um einen Gebrauchsgegenstand von einer Firma auszuleihen, muss man eine Grundgebühr von 5 Euro bezahlen und dazu noch 2 Euro pro Tag, bis man ihn zurückbringt. Ist x die Zahl der Tage, die eine solche Ausleihe dauert, und $f(x)$ die dafür zu entrichtende Gebühr (in Euro), so gilt
>
> $$f(x) = 2\,x + 5. \tag{1.6}$$

[3] Beachten Sie, dass in (1.3) der Ausdruck $f(x_0 + \Delta x)$ bedeutet: „f angewandt auf $x_0 + \Delta x$", während der Ausdruck $k\,(x_0 + \Delta x)$ bedeutet: „k mal $x_0 + \Delta x$". Letzterer könnte auch in der Form $k \cdot (x_0 + \Delta x)$ geschrieben werden (was aber nicht generell üblich ist, da die Malpunkte, sofern es nicht um reine Zahlen geht, meist weggelassen werden). Die Klammern um $x_0 + \Delta x$ dienen in diesen beiden Ausdrücken also gänzlich verschiedenen Zwecken, obwohl $f(x_0 + \Delta x)$ und $k\,(x_0 + \Delta x)$, von den Buchstaben abgesehen, ganz gleich aussehen. Derartige Unterschiede in der Bedeutung von Klammern sollten Sie aus dem jeweiligen Kontext heraus erkennen!

[4] Mit Δf wird hier die Änderung des Funktionswerts, d.h. die Differenz „Funktionswert an der neuen Stelle minus Funktionswert an der alten Stelle" bezeichnet. Die Kurzschreibweise Δf hat den Nachteil, dass durch sie im Unterschied zur ausführlichen Schreibweise $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ die Stelle x_0 nicht angegeben ist. Aber ihr Vorteil stellt sich ein, sobald Sie sich daran gewöhnt haben, ein Δ sogleich als eine Änderung bzw. eine Differenz zu erkennen.

[5] Die Beziehungen (1.3), (1.4) und (1.5) gelten auch für negative Δx. Aber nur für $\Delta x > 0$ beschreiben sie, wie sich der Funktionswert für *wachsendes* x ändert.

Hier ist also $k = 2$ und $d = 5$. Als Definitionsmenge wird sinnvollerweise die Menge $\mathbb{N}$ aller natürlichen Zahlen gewählt. (Der Tag 0 ist jener, an dem die Ausleihe stattfindet.) Um welchen Wert erhöht sich die zu zahlende Gebühr pro Woche? Da eine Woche 7 Tage hat, entspricht das dem Fall $\Delta x = 7$. Die für beliebige lineare Funktionen geltende Beziehung (1.5) nimmt in diesem Beispiel die Form

$$f(x_0 + 7) = f(x_0) + 2 \cdot 7 = f(x_0) + 14 \tag{1.7}$$

an. Jede Woche erhöht sich die Gebühr um 14 Euro, und zwar gleichgültig, an welchem Tag (x_0) zu zählen begonnen wird. In jedem Fall ist die Gebühr eine Woche später um 14 Euro angestiegen. Man nennt diesen Typ eines zeitlichen Verlaufs **lineares Wachstum**.

Einen wichtigen Spezialfall erhalten wir, indem wir $\Delta x = 1$ setzen. Aus (1.5) folgt dann

$$f(x_0 + 1) = f(x_0) + k. \tag{1.8}$$

Die Konstante k ist daher der Zuwachs des Funktionswerts, wenn die Variable (ausgehend von einem beliebigen Wert) um 1 erhöht wird. (Ist $k < 0$, so ist dieser „Zuwachs“ negativ, was einer Abnahme entspricht.)

Die Bedeutung der Konstante d ergibt sich, indem im Funktionsterm $x = 0$ gesetzt wird:

$$f(0) = d. \tag{1.9}$$

d ist also nichts anderes als der Funktionswert an der Stelle 0. Bezeichnet x die Zeit, und entspricht $x = 0$ dem Anfangszeitpunkt eines durch f beschriebenen zeitlichen Verlaufs, so ist d dessen „Anfangswert“.

Im Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr ist $d = 5$. Diese Konstante stellt die Grundgebühr dar, also jene Gebühr, die bereits zu Beginn (am „nullten Tag“) besteht.

2 Änderungsrate

Die Beziehung (1.4) besagt, dass die **Änderung** Δf des Funktionswerts beim Übergang von einer beliebigen Stelle x_0 zur Stelle $x_0 + \Delta x$, also die Differenz $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, stets gleich $k\,\Delta x$ ist.

Für das obige Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr bedeutet das: Die Änderung (der Zuwachs) der Gebühr während Δx Tagen ist $2\,\Delta x$.

Anstatt der Differenz Δf der zwei Funktionswerte (der Änderung) kann auch die **Änderungsrate** betrachtet werden. Sie ist definiert als der Quotient

$$\text{Änderungsrate} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,, \tag{2.1}$$

also als „Änderung des Funktionswerts dividiert durch Änderung der Stelle". Genauer handelt es sich um die Änderungsrate zwischen x_0 und $x_0 + \Delta x$ oder, kurz ausgedrückt, um die „Änderungsrate im Intervall[6] $[x_0, x_0+\Delta x]$". Sie drückt die Änderung „pro vorgerückter Strecke Δx" aus[7]. Mit (1.4) ergibt sich für jede lineare Funktion

$$\text{Änderungsrate} = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k\,\Delta x}{\Delta x} = k. \tag{2.2}$$

Die Änderungsrate einer linearen Funktion (in jedem beliebigen Intervall) ist daher stets gleich der Konstante k.

> Für das Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr bedeutet das: Die Änderungsrate der Gebühr ist gleich 2 oder, genauer ausgedrückt, „2 Euro pro Tag".

Eine Rate erkennt man in der Regel daran, dass ihre Beschreibung in Worten ein „pro" enthält. Da die „Änderung Δf des Funktionswerts pro vorgerückter Strecke Δx" gleich k ist, ergibt sich für ein gegebenes Δx die Änderung Δf mit Hilfe einer einfachen Schlussrechnung zu $k\,\Delta x$, was nichts anderes als (1.4) ist.

> Für das Beispiel (1.6) einer Ausleihgebühr sieht diese Schlussrechnung so aus:
>
> - Die Änderungsrate der Gebühr ist gleich 2 Euro pro Tag. Die Änderung der Gebühr während eines Tages ist gleich 2 Euro.
> - Die Änderung der Gebühr während eines Zeitraums von 4 Tagen ist $2 \cdot 4$ Euro $= 8$ Euro.
> - Die Änderung der Gebühr während einer Woche (7 Tage) ist gleich $2 \cdot 7$ Euro $= 14$ Euro.
> - Allgemein: Die Änderung der Gebühr während eines Zeitraums von Δx Tagen ist $2\,\Delta x$ Euro.

Ein anderes Beispiel einer Änderungsrate ist die **Geschwindigkeit**. Modellieren wir eine Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: Die Zeit sei durch die Variable t dargestellt, und $s(t)$ sei jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug zum Zeitpunkt t befindet. Fährt es mit konstanter Geschwindigkeit, so gilt

$$s(t) = v\,t + d, \tag{2.3}$$

wobei v und d fix vorgegebene Konstanten sind. Da $s(0) = d$ gilt, ist d jene Kilometermarkierung, bei der das Fahrzeug zur Zeit 0 ist (der „Anfangsort"). Die Änderung des Funktionswerts zwischen einem beliebigen Zeitpunkt t_0 und dem späteren Zeitpunkt $t_0 + \Delta t$ (also der zwischen diesen Zeitpunkten zurückgelegte Weg) ist gleich

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0) = v\,(t_0 + \Delta t) + d - v\,t_0 - d = v\,\Delta t. \tag{2.4}$$

[6] Zum Begriff des Intervalls siehe das Skriptum über die *Ordnung der reellen Zahlen*.

[7] Man kann sie auch *durchschnittliche* oder *mittlere* Änderungsrate nennen. Dieser Zusatz ist in unserem Zusammenhang nicht so wichtig, wird aber in der Differentialrechung bedeutsam, wenn auch die Änderungsrate „an *einer* Stelle x_0", also die „*momentane*" Änderungsrate betrachtet wird. Für lineare Funktionen sind mittlere und momentane Änderungsrate identisch.

Die Änderungsrate während des Zeitintervalls $[t_0, t_0 + \Delta t]$ ist die „pro verstrichener Zeit Δt zurückgelegte Strecke“, eine Größe, die wir als Geschwindigkeit bezeichnen. Wir berechnen sie zu

$$\text{Geschwindigkeit} = \text{Änderungsrate} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t} = \frac{v\,\Delta t}{\Delta t} = v. \tag{2.5}$$

Die Konstante v in (2.3) ist also nichts anderes als die Geschwindigkeit[8]. Messen wir die Funktionswerte (d.h. die zurückgelegte Strecke) in Kilometer und die Zeit t in Stunden, so messen wir v in „Kilometer pro Stunde“. Hier ist wieder das „pro“, das eine Rate anzeigt. Auch in der Abkürzung dieser Einheit, $\mathrm{km/h}$, erkennen wir das „pro“ am Schrägstrich, der die Division ausdrückt, oder in der Form $\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}$ am Bruchstrich[9].

3 Graphen linearer Funktionen

Der Graph jeder linearen Funktion f (mit Zuordnungsvorschrift (1.1) und Definitionsmenge $\mathbb{R}$) ist eine Gerade. Ist $k = 0$, so ist f eine konstante Funktion. Die Funktionsgleichung lautet dann $f(x) = d$. In diesem Fall ist der Graph eine „horizontale“ (d.h. zur ersten Achse parallele) Gerade. Aber auch für jedes $k \neq 0$ ist der Graph eine Gerade. Lesen Sie den nun folgenden Beweis dieser Tatsache und versuchen Sie, ihn zu verstehen:

Beweis: Wir nennen unsere Funktion f. Ihre Zuordnungsvorschrift ist vom Typ (1.1). Geht man von einem beliebigen Punkt $P = (x_0, f(x_0)) = (x_0, k\,x_0 + d)$ des Graphen aus und rückt von der Stelle x_0 aus um $\Delta x > 0$ vor, so ergibt sich der Punkt $Q = (x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x)) = (x_0 + \Delta x, k\,x_0 + d + k\,\Delta x)$, der ebenfalls auf dem Graphen liegt. Wird in der Zeichenebene vom Punkt P zum Punkt Q geschritten, indem man zuerst von P die Strecke Δx nach „rechts“ in Richtung der ersten Achse („in x-Richtung“) vorrückt und dann (nach „oben“ oder „unten“) in Richtung der zweiten Achse bis Q geht, so entsteht ein rechtwinkeliges Dreieck, ein so genanntes **Steigungsdreieck**, wie in Abbildung 1 illustriert. Die „horizontale“ (zur ersten Achse parallele) Kathete hat die Länge Δx. Für die „vertikale“ (zur zweiten Achse parallele) Kathete wird der Wert $\Delta f = k\,\Delta x$ notiert. (Ist k positiv, so ist Δf die Länge dieser Kathete, ist k negativ, so ist Δf gleich minus der Länge dieser Kathete.) Das Verhältnis der (möglicherweise mit einem Minuszeichen versehenen) „vertikalen“ zur „horizontalen“ Kathetenlänge ist

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{k\,\Delta x}{\Delta x} = k \tag{3.1}$$

und damit unabhängig von x_0 und Δx. Nach dem Strahlensatz sind daher alle

[8] Man kann sie auch *Durchschnittsgeschwindigkeit* nennen. Dieser Zusatz ist in unserem Zusammenhang nicht so wichtig, wird aber dann bedeutsam, wenn ein Fahrzeug mal langsamer und mal schneller fährt. Dann ist die Durchschnittsgeschwindigkeit von der *Momentangeschwindigkeit* zu unterscheiden. Siehe auch Fußnote 7.

[9] Der Hauptgrund, warum wir nicht „Stundenkilometer“ sagen sollten, besteht darin, dass dann dieses wichtige „pro“ verschluckt wird.

Steigungsdreiecke zueinander ähnlich[10], was impliziert, dass ihre Hypotenusen mit den Koordinatenachsen alle die gleichen Winkel bilden. Das ist nur möglich, wenn der Graph eine Gerade ist.

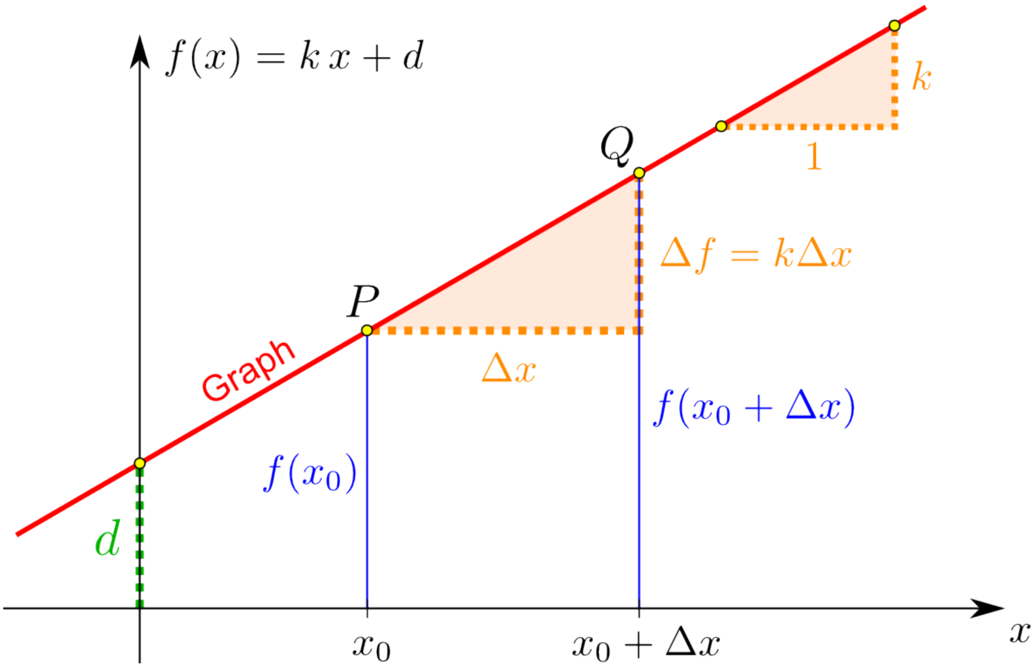


Abbildung 1: Graph einer linearen Funktion $f(x) = k\,x + d$ (wobei hier angenommen ist, dass k und d positiv sind). Eingezeichnet sind zwei Steigungsdreiecke (ein „allgemeines" mit beliebigem $\Delta x > 0$ und eines – rechts oben – mit $\Delta x = 1$), die den Anstieg k des Graphen angeben, sowie der Abschnitt auf der zweiten Achse, d. Der hier skizzierte Sachverhalt wird benutzt, um den Graphen einer gegebenen linearen Funktion zu zeichnen und, umgekehrt, um die Konstanten k und d zu ermitteln („abzulesen"), wenn der Graph gegeben ist. Beachten Sie, dass die beiden Steigungsdreiecke (so wie *alle* Steigungsdreiecke, die für diese Funktion gezeichnet werden können) zueinander ähnlich sind und daher den gleichen Anstieg ausdrücken!

Wie die Beziehung (3.1) ausdrückt, ist in *jedem* Steigungsdreieck das Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ gleich k. Die Konstante k wird als **Anstieg** oder **Steigung** des Graphen bezeichnet. Der Anstieg ist also eine Größe, die die „Steilheit" einer Geraden in Bezug auf die erste Koordinatenachse beschreibt.

Der Graph einer durch einen Term angegebenen linearen Funktion mit $k \neq 0$ kann gezeichnet werden, sobald zwei Punkte, die auf ihm liegen, ermittelt worden sind. Das wird beispielsweise mit einer der drei folgenden Methoden gemacht:

- **Methode 1**: Wegen $f(0) = d$ liegt der Punkt $(0, d)$ auf dem Graphen. Die Konstante d wird daher auch „Abschnitt auf der zweiten Achse" oder „Ordinatenabschnitt" genannt.

[10] Zwei geometrische Figuren sind zueinander *ähnlich*, wenn das Verhältnis zweier Strecken der einen Figur stets gleich dem Verhältnis der entsprechenden Strecken der anderen Figur ist. Ähnliche Figuren sind „aufgeblasene" bzw. „geschrumpfte" Versionen voneinander, wobei alle Proportionen (Seitenverhältnisse) gleich bleiben. Insbesondere sind alle einander entsprechenden Winkel gleich.

Um einen zweiten Punkt des Graphen zu finden, geht man von diesem ersten Punkt eine beliebige Strecke $\Delta x > 0$ nach „rechts" und die Strecke $k\,\Delta x$ „hinauf" (wobei „hinauf" im Fall negativer k bedeutet, die entsprechende Strecke „hinunter" zu gehen). Das ergibt einen zweiten Punkt $(\Delta x, k\,\Delta x + d)$, der ebenfalls auf dem Graphen liegt.

> Sie können diese Vorgangsweise auch so interpretieren: Die Zahlen Δx und $k\,\Delta x$ bestimmen die Seitenverhältnisse eines Steigungsdreiecks und damit die Richtung der Geraden. Gehen Sie vom Punkt $(0, d)$ aus Δx nach „rechts" und $k\,\Delta x$ „hinauf", so landen Sie im Punkt $(\Delta x, k\,\Delta x + d)$.

In den meisten Fällen wird es am einfachsten sein, $\Delta x = 1$ zu wählen.

> Die Regel, die die Richtung der Geraden bestimmt, lautet dann: „1 nach rechts, k hinauf", wobei „hinauf" für negatives k „hinunter" bedeutet.

Hat man auf diese Weise zwei Punkte des Graphen eingezeichnet, setzt man das Lineal an und zeichnet die Gerade durch sie.

Um den Graphen einer linearen Funktion zu zeichnen, die nur auf einem Intervall $[a, b]$ (also nicht auf ganz $\mathbb{R}$) definiert ist, können Sie diese Methode so adaptieren: Ermitteln Sie einen beliebigen Punkt P auf dem Graphen, beispielsweise $(a, f(a))$, und bestimmen Sie die Richtung der Geraden wie oben beschrieben mit Hilfe des Anstiegs k, d.h. gehen Sie vom Punkt P aus „1 nach rechts, k hinauf" (oder „Δx nach rechts, $k\,\Delta x$ hinauf"), um einen zweiten Punkt auf dem Graphen zu finden.

- **Methode 2**: Man bestimmt zunächst rechnerisch die Schnittpunkte des Graphen mit den Koordinatenachsen. Wegen $f(0) = d$ liegt der Punkt $(0, d)$ auf dem Graphen. Er ist der Schnittpunkt des Graphen mit der zweiten Achse. Um den Schnittpunkt des Graphen mit der ersten Achse zu finden, muss die Nullstelle von f ermittelt, d.h. die Gleichung $f(x) = 0$ gelöst werden, was aber ganz leicht geht: Aus $k\,x + d = 0$ folgt $x = -\frac{d}{k}$. Das ergibt den Schnittpunkt $(-\frac{d}{k}, 0)$ des Graphen mit der ersten Achse. Hat man diese zwei Punkte eingezeichnet, setzt man das Lineal an und zeichnet die Gerade durch sie.
- **Methode 3**: Sie können natürlich auch zwei Punkte des Graphen von f ermitteln, indem Sie die Funktionswerte an zwei beliebigen Stellen berechnen. Das ist insbesondere dann sinnvoll, wenn die lineare Funktion, deren Graphen Sie zeichnen wollen, nur auf einem Intervall $[a, b]$ (also nicht auf ganz $\mathbb{R}$) definiert ist. Zeichnen Sie die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ und verbinden Sie sie mit dem Lineal!

Umgekehrt kann jede Gerade in der Zeichenebene, die nicht parallel zur zweiten Achse (also nicht „vertikal") ist, als Graph einer linearen Funktion aufgefasst werden. Den Funktionsterm zu einem gegebenen Graphen zu ermitteln[11], wird oft als Übungsaufgabe gestellt. Auch eine Aufgabe dieser Art ist leicht zu bewältigen: Die Konstante d kann (entsprechend ihrem Namen) als „Abschnitt auf der zweiten Achse", d.h. als zweite Koordinate des Schnittpunkts mit der zweiten Achse abgelesen werden. Um den Anstieg k zu ermitteln, wird ein (beliebiges!)

[11] Genauer gesagt soll in diesen Aufgaben *ein* Funktionsterm ermittelt werden, denn Funktionsterme sind nicht eindeutig bestimmt! So geben beispielsweise die Terme $2\,x + 6$ und $2\,(x + 3)$ die gleiche Funktion an.

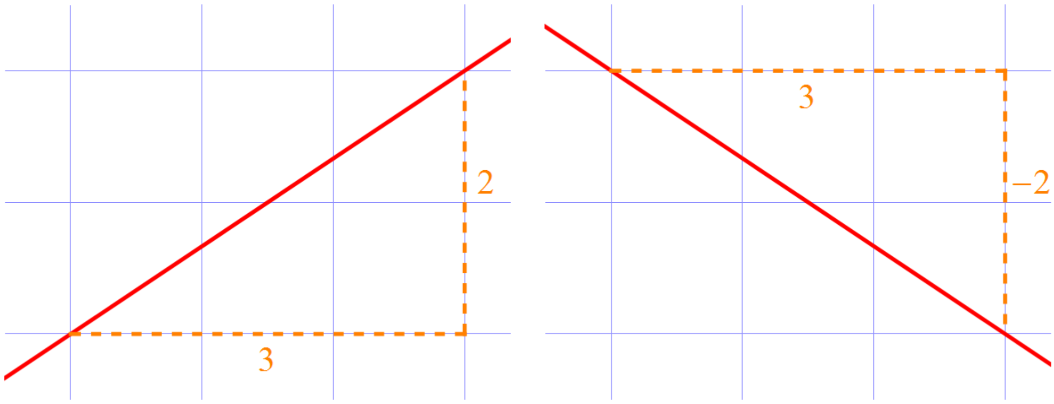


Abbildung 2: Um den Anstieg einer Geraden in der Zeichenebene abzulesen, benutzt man ein (beliebiges!) Steigungsdreieck. Falls – wie in diesen zwei Beispielen – ein Koordinatenraster eingezeichnet ist, lässt sich manchmal ein Steigungsdreieck mit ganzzahligen Werten für Δx und Δf finden. Links: Ein Steigungsdreieck, das $\Delta x = 3$ entspricht. Die zugehörige Differenz der Funktionswerte ist $\Delta f = 2$, und daher ist der Anstieg $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{2}{3}$. Rechts: Ein Steigungsdreieck, das ebenfalls $\Delta x = 3$ entspricht. Die zugehörige Differenz der Funktionswerte ist nun $\Delta f = -2$, und daher ist der Anstieg in diesem Fall $k = \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{2}{3}$.

Steigungsdreieck gezeichnet. In den meisten Fällen wird es am einfachsten sein, $\Delta x = 1$ zu wählen. (In Abbildung 1 ist – rechts oben – ein solches Steigungsdreieck gezeichnet.) Gemäß der Regel „1 nach rechts, k hinauf“ kann dann k als Länge der „vertikalen“ Kathete (gegebenenfalls mit einem Minuszeichen, falls sie „hinunter“ weist, d.h. falls das zugehörige Δf negativ ist) abgelesen werden. Ist aufgrund des verwendeten Maßstabs oder der Lage der Geraden die Wahl $\Delta x = 1$ ungünstig, so kann auch jedes andere Steigungsdreieck verwendet werden. (Ist die Skizze mit einem Koordinatenraster ausgestattet, so ist dabei oft überhaupt nichts zu zeichnen, sondern lediglich ein geeignetes Steigungsdreieck gedanklich zu wählen.) Der Anstieg ist dann gleich dem Verhältnis $\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Abbildung 2 zeigt zwei derartige Situationen, eine mit positivem und eine mit negativem Anstieg.

In Abbildung 3 sind fünf Graphen linearer Funktionen mit den zugehörigen Funktionstermen angegeben. Versuchen Sie, die Funktionsterme und die Graphen gemäß den oben besprochenen Regeln aufeinander zu beziehen!

4 Rechnerische Ermittlung linearer Funktionen

In der Praxis steht man oft vor der Aufgabe, jene lineare Funktion f zu ermitteln, deren Werte $f(x_0)$ und $f(x_1)$ an zwei Stellen x_0 und x_1 bekannt sind[12]. Bezeichnen wir $f(x_0)$ mit y_0 und $f(x_1)$ mit y_1, so ist diese Aufgabe gleichbedeutend damit, eine lineare Funktion zu finden, deren Graph durch zwei vorgegebene Punkte (x_0, y_0) und (x_1, y_1) verläuft. Um Aufgaben dieser Art schnell lösen zu können, drücken wir ganz allgemein k und d durch die gegebenen

[12] Eine Funktion mit gewünschten Eigenschaften zu „ermitteln“, zu „finden“ oder zu „bestimmen“ bedeutet, einen Funktionsterm anzugeben.

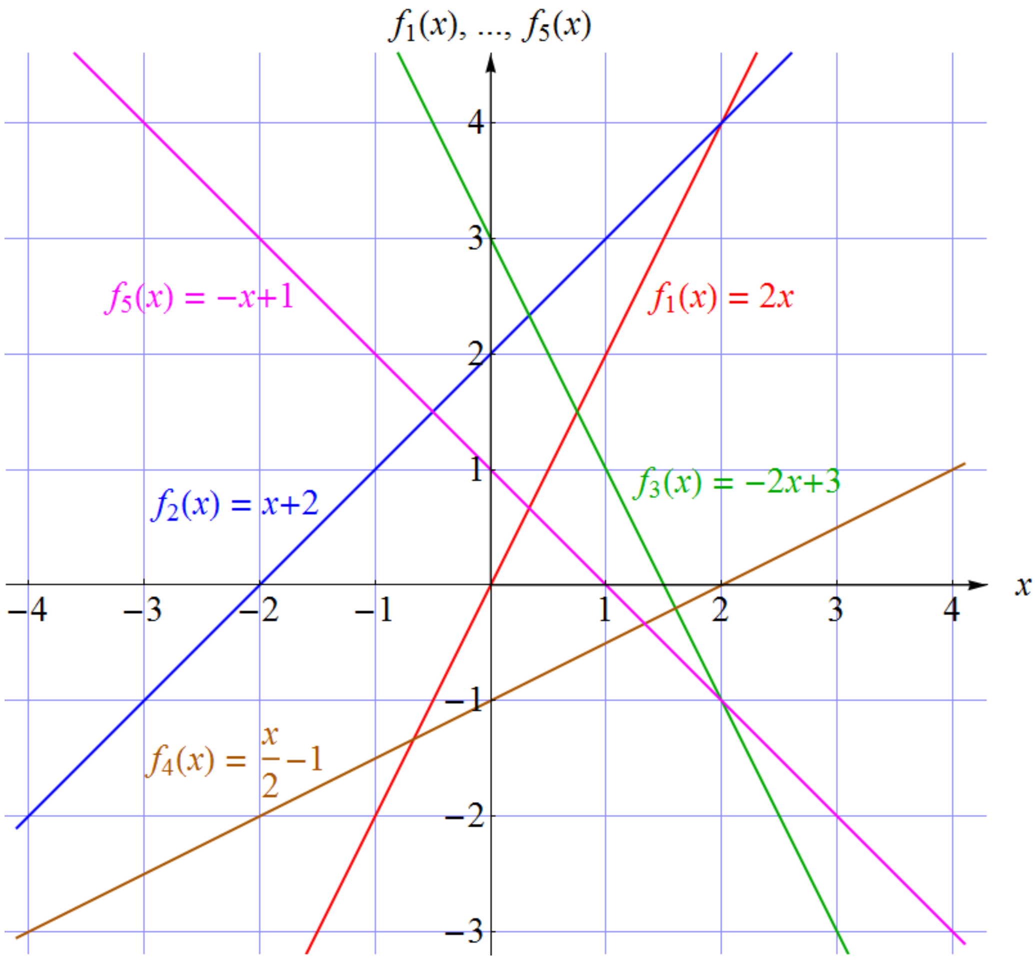


Abbildung 3: Die Graphen von fünf linearen Funktionen und ihre Funktionsterme. Überprüfen Sie für jeden dieser Graphen durch Ablesung von k und d die angegebenen Funktionsterme! Danach stellen Sie sich vor, er wären nur die Funktionsterme angegeben, und vollziehen Sie nach, wie Sie mit diesen Angaben die Geraden zeichnen können!

Zahlen aus: Mit $f(x) = k\,x + d$ ergibt sich

$$f(x_0) = k\,x_0 + d \tag{4.1}$$
$$f(x_1) = k\,x_1 + d\,, \tag{4.2}$$

woraus wir durch Subtraktion sofort

$$f(x_1) - f(x_0) = k\,(x_1 - x_0) \tag{4.3}$$

und daraus

$$k = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \tag{4.4}$$

erhalten. Beachten Sie, dass diese Beziehung nichts anderes aussagt als (2.2): Die Änderungsrate k von f ist die „Änderung des Funktionswerts dividiert durch Änderung der Stelle“. Die Änderung der Stelle ist $\Delta x = x_1 - x_0$, die Änderung des Funktionswerts ist $\Delta f = f(x_1) -$

$f(x_0)$. Wir hätten (4.4) auch durch Einsetzen von $\Delta f = f(x_1) - f(x_0)$ und $\Delta x = x_1 - x_0$ in die Formel $k = \frac{\Delta f}{\Delta x}$ herleiten können. Aus (4.1) folgern wir

$$d = f(x_0) - k\,x_0\,, \tag{4.5}$$

womit wir den Funktionsterm so umschreiben können, dass er direkt durch die vorgegebenen Zahlenwerte x_0, $f(x_0)$, x_1 und $f(x_1)$ ausgedrückt ist:

$$\begin{aligned} f(x) &= k\,x + d = k\,x + f(x_0) - k\,x_0 = f(x_0) + k\,(x - x_0) = \\ &= f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)\,. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Unser Ergebnis (das Sie sich einprägen und merken sollten) lautet also[13]:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}\,(x - x_0)\,. \tag{4.7}$$

Mit den Bezeichnungen y_0 für $f(x_0)$ und y_1 für $f(x_1)$ kann es auch in der Form[14]

$$f(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}\,(x - x_0) \tag{4.8}$$

geschrieben werden. Nun können die gegebenen Zahlenwerte von x_0, x_1, $f(x_0)$ (d.h. y_0) und $f(x_1)$ (d.h. y_1) eingesetzt werden, um sofort den gewünschten Funktionsterm zu erhalten.

Ist der Anstieg k einer linearen Funktion f und ein Funktionswert $f(x_0)$ an einer Stelle x_0 bekannt, so kann die in der Umformung (4.6) enthaltene Beziehung

$$f(x) = f(x_0) + k\,(x - x_0) \tag{4.9}$$

verwendet werden, um direkt die Zahlenwerte für x_0 und $f(x_0)$ einzusetzen. Auch diese Formel sollten Sie sich merken! Mit $x_0 = 0$ ergibt sich daraus $f(x) = f(0) + k\,x$, und mit (1.9) erhalten wir unsere frühere Darstellung

$$f(x) = k\,x + d, \tag{4.10}$$

vgl. (1.1).

Hier zwei Beispiele zur rechnerischen Ermittlung linearer Funktionen:

> **Beispiel 1**: Es ist jene lineare Funktion f zu bestimmen, für die $f(2) = 4$ und $f(3) = 7$ gilt. Lösung: Mit $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $f(x_0) = 4$ und $f(x_1) = 7$ ergibt sich sofort
>
> $$f(x) = 4 + \frac{7-4}{3-2}\,(x - 2) = 4 + 3\,(x - 2) = 3\,x - 2\,. \tag{4.11}$$
>
> Die gesuchte Funktion f ist also durch $k = 3$ und $d = -2$ charakterisiert.

[13] Überzeugen Sie sich von seiner Richtigkeit, indem Sie in (4.7) $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ einsetzen!

[14] Überzeugen Sie sich auch von der Richtigkeit dieser Version, indem Sie $x = x_0$ bzw. $x = x_1$ einsetzen!

Beispiel 2: Es ist jene lineare Funktion g zu bestimmen, deren Graph durch die Punkte $(3, 4)$ und $(5, 11)$ verläuft. Lösung: Mit $x_0 = 3$, $x_1 = 5$, $y_0 = 4$ und $y_1 = 11$ ergibt sich sofort

$$g(x) = 4 + \frac{11-4}{5-3}\,(x-3) = 4 + \frac{7}{2}\,(x-3) = \frac{7}{2}\,x - \frac{13}{2}\,. \tag{4.12}$$

Die gesuchte Funktion g ist also durch $k = \frac{7}{2}$ und $d = -\frac{13}{2}$ charakterisiert.

Beachten Sie, dass diese beiden Beispiele, obwohl unterschiedlich formuliert, die gleiche Struktur haben! Die erste Aufgabe könnte man auch so formulieren: Es ist jene lineare Funktion f zu bestimmen, deren Graph durch die Punkte $(2, 4)$ und $(3, 7)$ verläuft. Die zweite Aufgabe könnte man auch so formulieren: Es ist jene lineare Funktion g zu bestimmen, für die $g(3) = 4$ und $g(5) = 11$ gilt. In den unterschiedlichen Formulierungen kommen lediglich zwei Standpunkte zum Ausdruck, zwischen denen Sie schnell und sicher wechseln können sollten:

- Der eine Standpunkt betont den Aspekt der Anwendung einer Funktion auf Zahlen und verwendet Formulierungen, in denen von Stellen, Funktionswerten, Änderungen und Änderungsraten die Rede ist.
- Der andere, eher „geometrische" Standpunkt macht sich die grafische Darstellung im Koordinatensystem zunutze und verwendet Formulierungen, in denen von Punkten und Graphen (Geraden) die Rede ist.

Sie beziehen sich aber beide auf den gleichen Sachverhalt. So besagen beispielsweise die Aussagen „für die Funktion h gilt $h(1) = -2$" und „der Graph von h verläuft durch den Punkt $(1, -2)$" genau das Gleiche.

Besonders wichtig im Zusammenhang mit diesen zwei Standpunkten beim Umgang mit linearen Funktionen ist es, sich die **Doppelrolle der Konstante** k vor Augen zu halten:

- Als Änderungsrate der betreffenden Funktion gibt ihr Wert Auskunft darüber, wie sich der Funktionswert „pro weitergerückter Strecke Δx" ändert (nämlich um k).
- Als Anstieg des Graphen gibt ihr Wert Auskunft darüber, wie „steil" dieser ist.

Vergessen Sie also bitte nicht: Der Anstieg des Graphen einer linearen Funktion ist stets gleich ihrer Änderungsrate. Dieses Konzept wird beispielsweise im Straßenverkehr ausgenutzt, um anzugeben, wie steil eine Straße ansteigt. Wenn Sie in einem Verkehrszeichen eine Steigungsangabe von 12% sehen, so bedeutet das, dass die betreffende Straße, als Graph einer linearen Funktion aufgefasst, den Anstieg $k = 0.12$ besitzt. Auf einer horizontal gemessenen Strecke von $1\,\mathrm{km}$ steigt sie um $120\,\mathrm{m}$ (also um 12 Prozent von $1\,\mathrm{km}$) an. Auch in der Formulierung „$120\,\mathrm{m}$ Höhenzuwachs pro Kilometer" entdecken wir das für eine Rate charakteristische „pro"!

5 Schnittmengen der Graphen linearer Funktionen

Sind zwei lineare Funktionen f und g gegeben, so können wir fragen, ob es eine oder mehrere Stellen x gibt, an denen die Funktionswerte übereinstimmen, d.h. an denen

$$f(x) = g(x) \tag{5.1}$$

gilt. Das ist nichts anderes als eine lineare Gleichung[15]. Ist x eine Lösung, so sind die Punkte $(x, f(x))$ und $(x, g(x))$ identisch, d.h. es handelt sich nur um einen einzigen Punkt, der auf *beiden* Graphen liegt. Diesen Sachverhalt können wir auch umgekehrt betrachten: Jeder gemeinsame Punkt der Graphen von f und g definiert eine Lösung von (5.1), nämlich einfach als erste Koordinate dieses Punktes. Die Gleichung (5.1) kann daher als *geometrisches Problem* aufgefasst werden: Man bestimme die **Durchschnittsmenge** (kurz **Schnittmenge**) der Graphen von f und g!

Beispiel:

$$f(x) = 3\,x - 5 \tag{5.2}$$
$$g(x) = 2\,x - 1. \tag{5.3}$$

Die Gleichung (5.1) lautet damit

$$3\,x - 5 = 2\,x - 1. \tag{5.4}$$

Wir lösen sie (mit Äquivalenzumformungen):

$$\begin{array}{rcll} 3\,x - 5 & = & 2\,x - 1 & |\quad -2\,x \\ x - 5 & = & -1 & |\quad +5 \\ x & = & 4 & \end{array} \tag{5.5}$$

Sie besitzt also genau eine Lösung, nämlich 4. Die zugehörigen Funktionswerte sind $f(4) = g(4) = 7$. Zeichnen Sie zur Übung die Graphen der beiden Funktionen und vergewissern Sie sich, dass der Punkt $S = (4, 7)$ ihr Schnittpunkt ist!

Da die Graphen linearer Funktionen Geraden sind, gibt es im Allgemeinen für Gleichungen vom Typ (5.1) drei Lösungsfälle:

- Die Anstiege der Graphen von f und g sind verschieden. In diesem Fall haben ihre Graphen verschiedene Richtungen. Sie besitzen genau einen Schnittpunkt, was im Gegenzug bedeutet, dass die Gleichung (5.1) genau eine Lösung besitzt. Rechnerisch merken wir das daran, dass die Gleichung nach einer Äquivalenzumformung auf eine einzige Lösung führt.
- Die Anstiege der Graphen von f und g sind gleich, aber die Graphen sind verschieden (was wir etwa daran erkennen, dass ihre „Abschnitte auf der zweiten Achse", d.h. ihre Konstanten d, verschieden sind). In diesem Fall besitzen die Graphen keinen Schnittpunkt (sie sind parallel, aber nicht identisch), was im Gegenzug bedeutet, dass die Gleichung (5.1) keine Lösung besitzt. Rechnerisch merken wir das daran, dass die Gleichung nach einer Äquivalenzumformung auf einen Widerspruch (etwa $1 = 0$) führt.

[15] Siehe bei Bedarf das Skriptum über *lineare Gleichungen und Äquivalenzumformungen*.

- Die Anstiege der Graphen von f und g sind gleich, und die Graphen sind identisch (was wir etwa daran erkennen, dass auch ihre „Abschnitte auf der zweiten Achse“, d.h. ihre Konstanten d, gleich sind). In diesem Fall ist $f = g$. Wir haben es dann mit einer einzigen Funktion und daher mit einer einzigen Geraden zu tun, was im Gegenzug bedeutet, dass jede reelle Zahl Lösung der Gleichung (5.1) ist. Rechnerisch merken wir das daran, dass auf der linken und auf der rechten Seite der Gleichung das Gleiche steht, sodass die Variable nach einer Äquivalenzumformung herausfällt und sich eine wahre Aussage (wie $0 = 0$) ergibt.

Das Schnittproblem kann auch anders betrachtet werden: Definieren wir die Differenz unserer zwei Funktionen als eine weitere Funktion h durch

$$h(x) = f(x) - g(x), \tag{5.6}$$

so ist die Gleichung (5.1) äquivalent zur Gleichung

$$h(x) = 0, \tag{5.7}$$

stellt also die Frage nach den Nullstellen von h dar. Geometrisch betrachtet ist eine Nullstelle von h der Schnittpunkt des Graphen von h mit der ersten Achse[16].

> Für das Beispiel (5.2) – (5.3) ist die Differenzfunktion durch
>
> $$h(x) = x - 4 \tag{5.8}$$
>
> gegeben. Ihre (einzige) Nullstelle ist klarerweise 4, was nichts anderes als die bereits oben ermittelte Lösung der Gleichung (5.4) ist. (Zeichnen Sie zur Übung den Graphen von h!)

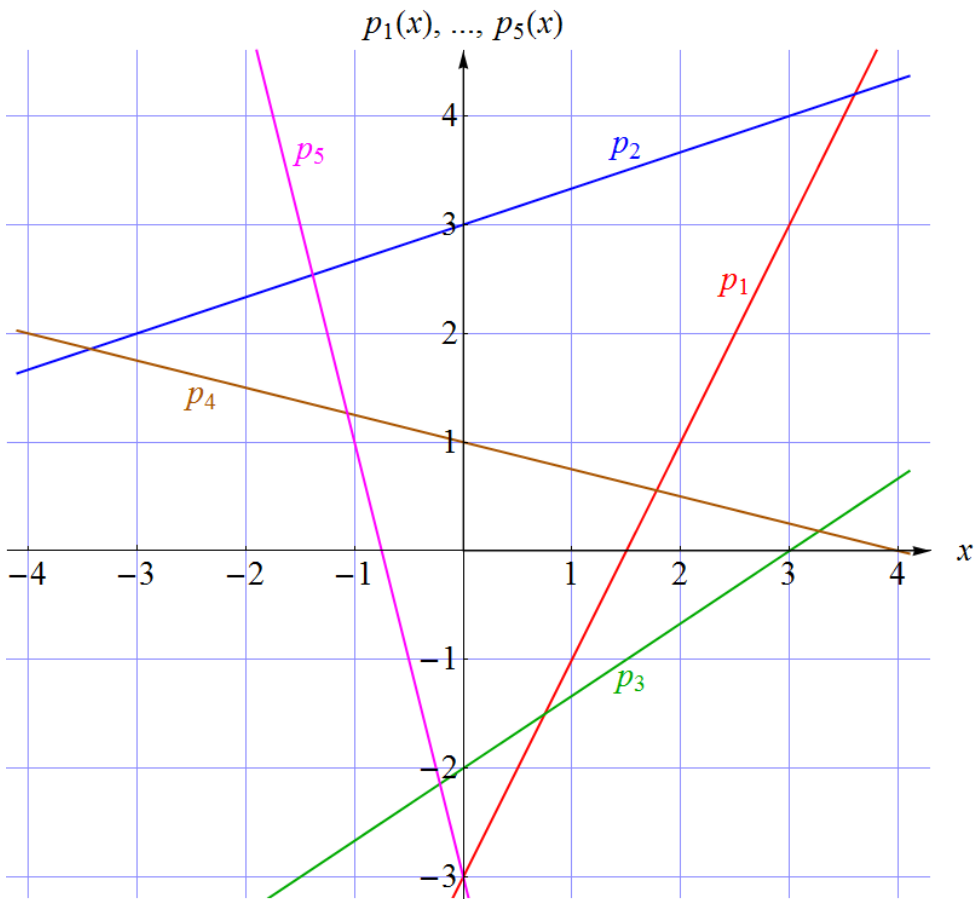
Da Schnittpunkte und Nullstellen von Graphen aus Zeichnungen (zumindest näherungsweise) abgelesen werden können, haben wir hier einen (sehr einfachen) Beispieltyp für das *grafische Lösen von Gleichungen* vor uns.

[16] Genauer: Die x-Koordinate dieses Schnittpunkts. Erinnern Sie sich an den Unterschied zwischen „Stellen“ und „Punkten“, wie er im Skriptum *Funktionsdarstellungen: Term, Graph, Tabelle* beschrieben wurde!

6 Übungsaufgaben

Hier einige Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Die folgende Abbildung zeigt fünf Graphen linearer Funktionen. Geben Sie Funktionsterme für sie an!



Lösungen:

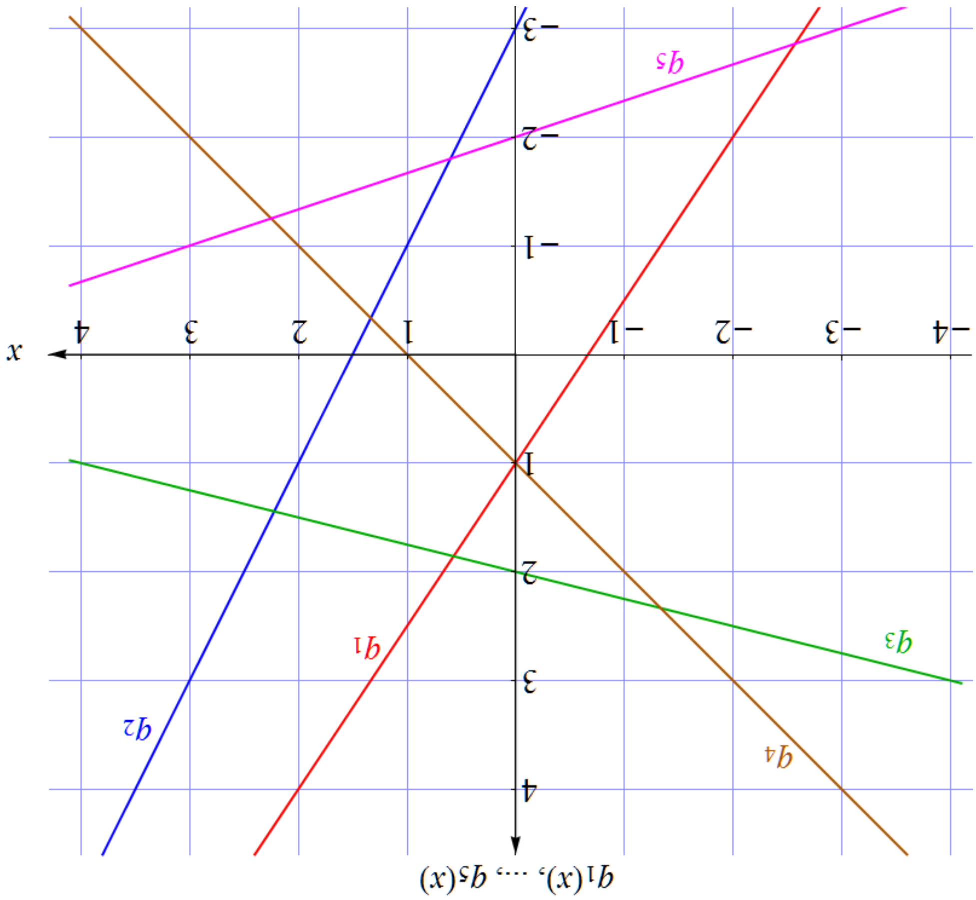
$$p_1(x) = 2\,x - 3,$$
$$p_2(x) = \tfrac{x}{3} + 3,$$
$$p_3(x) = \tfrac{2}{3}\,x - 2,$$
$$p_4(x) = -\tfrac{x}{4} + 1,$$
$$p_5(x) = -4\,x - 3.$$

- Die Funktionen $q_1, \ldots, q_5$ sind gegeben durch

$$q_1(x) = \frac{3}{2}\,x + 1 \tag{6.1}$$
$$q_2(x) = 2\,x - 3 \tag{6.2}$$
$$q_3(x) = -\frac{x}{4} + 2 \tag{6.3}$$
$$q_4(x) = -x + 1 \tag{6.4}$$
$$q_5(x) = \frac{x}{3} - 2 \tag{6.5}$$

Zeichnen Sie ihre Graphen!

Lösung:



- Bestimmen Sie jene lineare Funktion g, für die $g(1) = 3$ und $g(5) = -13$ gilt!

  Lösung:

  $$g(x) = -4x + 7.$$

- Bestimmen Sie jene lineare Funktion h, deren Graph durch die Punkte $(2, 8)$ und $(4, 11)$ verläuft!

  Lösung:

  $$h(x) = \frac{3}{2}x + 5.$$

- Bestimmen Sie jene lineare Funktion p, deren Anstieg gleich 7 ist und deren Graph durch den Punkt $(2, 3)$ verläuft!

  Lösung:

  $$p(x) = 7x - 11.$$

- Gegeben sind die linearen Funktionen f und g durch

  $$f(x) = 2\,x - 3 \tag{6.6}$$
  $$g(x) = 7\,x + 2\,. \tag{6.7}$$

  Ermitteln Sie den Schnittpunkt S ihrer Graphen!

  Lösung:

  $$S = (-1, -5).$$

Weitere Möglichkeiten, Ihr Wissen über lineare Funktionen und ihre Graphen zu überprüfen und zu festigen, bieten zahlreiche Ressourcen im Web, unter anderem der *Kacheltest* http://www.mathe-online.at/kacheltests/lineare_funktionen_und_ihre_graphen/.

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juli 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.