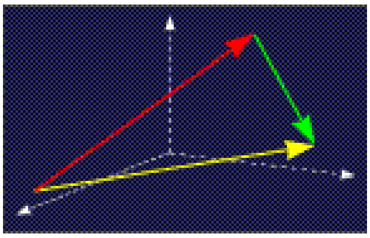
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Differenzieren – kurz und bündig

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

Dieses Skriptum gibt eine kompakte Einführung in die Differentialrechnung.

1 Die Ableitung

Einer der zentralen Begriffe bei der Diskussion linearer Funktionen[1] war jener der *Änderungsrate*, genauer: der *mittleren* oder *durchschnittlichen* Änderungsrate oder *Änderungsrate in einem Intervall*: Ist f eine lineare Funktion und wird der Funktionswert $f(x_0)$ an einer Stelle x_0 mit dem Funktionswert $f(x_0 + \Delta x)$ an der Stelle $x_0 + \Delta x$ verglichen (wir haben damals $\Delta x > 0$ vorausgesetzt, sodass von x_0 aus ein Stück Δx „vorgerückt" wird), so drückt die Änderungsrate von f die Änderung des Funktionswerts Δf „pro vorgerückter Strecke Δx" aus:

$$\text{Änderungsrate von } f \text{ im Intervall } [x_0, x_0 + \Delta x] = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}\,. \tag{1.1}$$

Sie hängt nicht von der konkreten Wahl der Stelle x_0 und der Strecke Δx, um die vorgerückt wird, ab, gilt also generell für die (lineare) Funktion als Ganzes. Der Graph von f ist eine Gerade, deren Anstieg gleich der Änderungsrate ist.

In (1.1) können wir ohne weiteres auch $\Delta x < 0$ zulassen, was bedeutet, von x_0 aus ein Stück nach links zu gehen und die entsprechende Änderung Δf des Funktionswerts auf die Änderung Δx der unabhängigen Variable zu beziehen. Das Ergebnis ändert sich dadurch nicht.

[1] Siehe das Skriptum *Lineare Funktionen und ihre Graphen*.

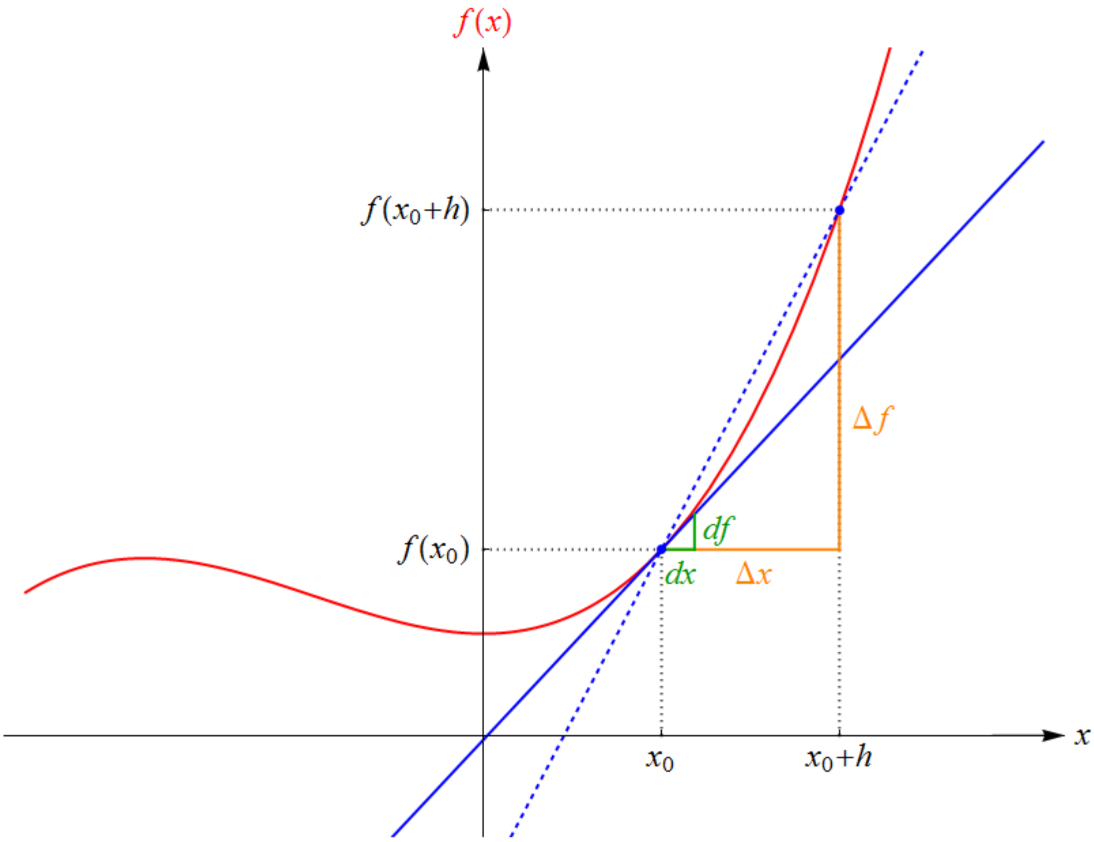


Abbildung 1: Zur Definition der Ableitung: Die mittlere Änderungsrate (1.4) der Funktion f beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$ (der Differenzenquotient) ist gleich dem Anstieg $\Delta f/\Delta x$ der (strichliert eingezeichneten) Sekante. Im Grenzübergang $h \to 0$ rückt $x_0 + h$ immer näher an x_0 heran, und die Sekante geht in die Tangente an den Graphen von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über. Deren Anstieg ist die Ableitung von f an der Stelle x_0. Interpretiert als Differentialquotient df/dx ist die Ableitung das entsprechende Verhältnis „infinitesimaler" Änderungen. Da „unendlich kleine Größen" kein sinnvolles Konzept sind (und man sie sich überdies nicht vorstellen kann), denkt man sich dx und df ersatzweise als *sehr klein*. Das kleine grüne Steigungsdreieck ist hier innerhalb des Bereichs angesiedelt, in dem Tangente und Sekante „praktisch übereinstimmen". Mathematisch macht der Anstieg, den es misst, aber nur im Grenzübergang $h \to 0$ Sinn.

Nun sei f eine Funktion, die *nicht* notwendigerweise linear ist. Praktisch alle Funktionen, die Sie kennen, haben Kurven[2] als Graphen. Für eine solche Funktion kann ebenfalls die Änderungsrate beim Übergang von einer Stelle x_0 zu einer benachbarten Stelle $x_1 = x_0 + \Delta x$ betrachtet werden. Der Kürze halber werden wir Δx im Folgenden mit h bezeichnen, haben also

$$\Delta x = x_1 - x_0 = h, \tag{1.2}$$

wobei wir voraussetzen, dass $h \neq 0$ ist. Die Änderung des Funktionswerts beim Übergang von x_0 zu x_1 ist durch

$$\Delta f = f(x_1) - f(x_0) = f(x_0 + h) - f(x_0) \tag{1.3}$$

[2] Das gilt auch für lineare Funktionen, denn aus mathematischer Sicht ist auch eine Gerade eine Kurve.

gegeben. Die entsprechende **mittlere Änderungsrate** ist dann gleich dem Quotienten

$$\begin{aligned} &\text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } x_0 \text{ zu } x_0 + h = \\ &= \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}\,. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Als Quotient zweier Differenzen (Differenz der Funktionswerte dividiert durch Differenz der x-Werte) wird sie auch als **Differenzenquotient** bezeichnet. Da f nicht mehr als linear vorausgesetzt wird, besitzt die Größe (1.4) eine andere, allgemeinere Bedeutung als (1.1): Sie ist der Anstieg jener Geraden, die durch die Punkte $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, die beide auf dem Graphen von f liegen, verläuft. Wir nennen eine solche Gerade *Sekante* (in Abbildung 1, die auch andere Aspekte zeigt, auf die wir noch zu sprechen kommen, strichliert dargestellt). Im allgemeinen Fall wird die mittlere Änderungsrate (1.4) nun von den beiden Stellen x_0 und $x_0 + h$ abhängen, ist also nicht mehr eine für die Funktion als Ganzes gültige Konstante.

> Anwendungsbeispiel: Wird die Zeit durch die Variable t dargestellt und bezeichnet $s(t)$ jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug, das sich nicht unbedingt mit konstanter Geschwindigkeit bewegt, zum Zeitpunkt t befindet, so ist die Änderungsrate von s beim Übergang von t_0 zu $t_0 + \Delta t$, also (mit der Bezeichnung $\Delta t = h$)
>
> $$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0+h) - s(t_0)}{h}\,, \tag{1.5}$$
>
> gleich der *Durchschnittsgeschwindigkeit* des Fahrzeugs zwischen den Zeitpunkten t_0 und $t_0 + h$.

Die Frage, mit der die Differentialrechnung beginnt, lautet: Ist es möglich, für eine Funktion f eine **momentane Änderungsrate** (oder **lokale Änderungsrate**) an einer *einzigen* Stelle x_0 zu definieren (und zu berechnen)?

> Für das Beispiel des bewegten Fahrzeugs wäre zu erwarten, dass eine solche momentane Änderungsrate die *Momentangeschwindigkeit* zu einem Zeitpunkt t_0 angibt.

In (1.4) einfach $h = 0$ zu setzen, funktioniert nicht, da wir dann eine Division „Null durch Null“ bekämen. Die zentrale Idee, diesem Problem zu entkommen, besteht nun darin, x_0 festzuhalten, die mittleren Änderungsraten von f beim Übergang von x_0 zu $x_0 + h$ für $h \neq 0$ zu betrachten und einen „Grenzübergang“ $h \to 0$ durchzuführen. Stellen Sie sich dabei intuitiv vor, dass h schrittweise immer näher zur Zahl 0 rückt (egal, ob von links oder von rechts). Wenn im Zuge eines solchen gedanklichen Prozesses die mittlere Änderungsrate einer wohlbestimmten Zahl zustrebt, und zwar unabhängig davon, wie die schrittweise Annäherung $h \to 0$ durchgeführt wird, so nennen wir diese Zahl die **Ableitung** von f an der Stelle x_0 und schreiben sie in der Form[3]

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \tag{1.6}$$

[3] Ausgesprochen „f Strich“.

an[4]. Hier haben wir die gesuchte momentane Änderungsrate an der Stelle x_0 ! Falls sie existiert, nennen wir f an der Stelle x_0 **differenzierbar**.

Beispiel: Wir berechnen die Ableitung der durch $f(x) = x^2$ definierten Funktion f an der Stelle 3. Die Änderungsrate beim Übergang von der Stelle 3 zur Stelle $3 + h$ ist gegeben durch

$$\begin{aligned}&\text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } 3 \text{ zu } 3+h = \\ &= \frac{f(3+h)-f(3)}{h} = \frac{(3+h)^2-3^2}{h} = \\ &= \frac{9+6\,h+h^2-9}{h} = \frac{6\,h+h^2}{h} = 6+h\,.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Gehen sie diese kurze Rechnung im Detail durch! Mit ihrem Ergebnis können wir nun den Grenzübergang $h \to 0$ sehr leicht durchführen, denn klarerweise strebt $6+h$ für $h \to 0$ gegen 6. Damit ist gezeigt, dass die Ableitung der Funktion f an der Stelle 3 existiert und gleich 6 ist:

$$f'(3) = 6\,. \tag{1.8}$$

Die geometrische Bedeutung der Ableitung erschließt sich, indem wir uns vorstellen, wie der Grenzübergang $h \to 0$ in der grafischen Darstellung aussieht. Da $x_0 + h$ immer näher an x_0 heranrückt, geht die Sekante in die **Tangente** an den Graphen im Punkt $(x_0, f(x_0))$ über, und die Ableitung ist gleich dem Anstieg dieser Tangente (siehe Abbildung 1). Die Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 existiert genau dann, wenn der Graph von f im Punkt $(x_0, f(x_0))$ eine wohldefinierte Tangente mit endlichem Anstieg (d.h. eine Tangente, die nicht "vertikal" verläuft) besitzt. Wir können diesen Sachverhalt auch so ausdrücken: Eine Funktion ist an einer Stelle differenzierbar, wenn sie sich in unmittelbarer Nachbarschaft dieser Stelle durch eine lineare Funktion (deren Graph die Tangente ist) approximieren lässt.

Nicht jede Funktion ist an allen Stellen differenzierbar. So hat beispielsweise der Graph der Betragsfunktion $g : x \mapsto |x|$ im Ursprung einen Knick (siehe Abbildung 2), besitzt also dort *keine* wohldefinierte Tangente. Das macht sich auch in der Berechnung bemerkbar: Für $h \neq 0$ gilt

$$\begin{aligned}&\text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } 0 \text{ zu } h = \\ &= \frac{g(h)-g(0)}{h} = \frac{|h|-|0|}{h} = \frac{|h|}{h} = \text{Vorzeichen von } h\,.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Nun lässt sich der Grenzübergang $h \to 0$ für die mittlere Änderungsrate nicht mehr durchführen: Je nachdem, ob sich h von links ($h < 0$) oder von rechts ($h > 0$) der Stelle 0 annähert, erhalten wir -1 oder 1. Wir könnten h auch mit wechselndem Vorzeichen gegen 0 streben lassen, mit dem Effekt, dass die mittlere Änderungsrate (1.9) zwischen -1 und 1 hin und her springt. Daraus schließen wir, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 *nicht* differenzierbar ist.

[4] In einer mathematisch exakteren Vorgangsweise würde man zur Durchführung dieses „schrittweisen“ Grenzübergangs konvergente Folgen benutzen, auf die wir hier aber nicht eingehen.

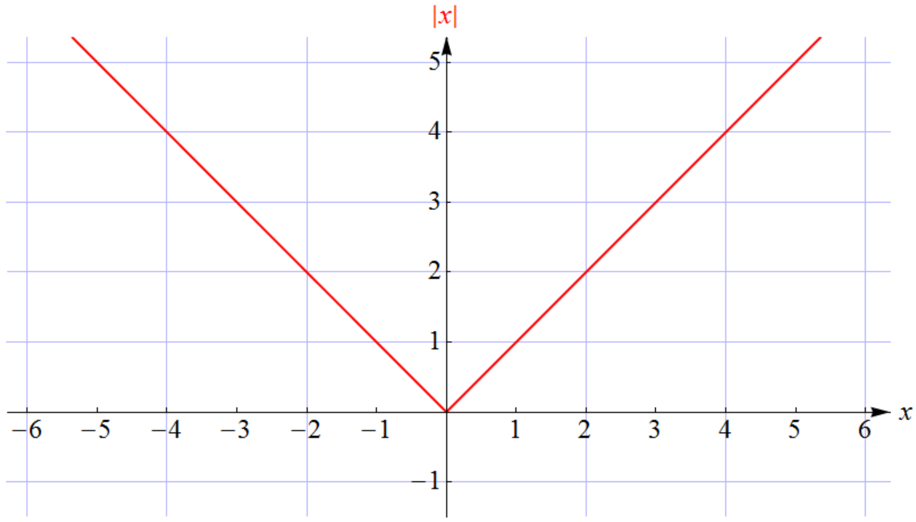


Abbildung 2: Der Graph der Betragsfunktion $x \mapsto |x|$. Der Knick im Punkt $(0,0)$ zeigt, dass die Betragsfunktion an der Stelle 0 nicht differenzierbar ist.

An allen Stellen $x_0 \neq 0$ hingegen ist die Betragsfunktion differenzierbar: Für $x_0 > 0$ fällt die Tangente mit dem Graphen der linearen Funktion $x \mapsto x$ (mit Steigung 1) zusammen, die Ableitung ist daher an allen positiven Stellen gleich 1. Für $x_0 < 0$ fällt die Tangente mit dem Graphen der linearen Funktion $x \mapsto -x$ (mit Steigung -1) zusammen, die Ableitung ist daher an allen negativen Stellen gleich -1.

Alle Funktionen, die in den bisherigen Skripten besprochen wurden, sind an fast allen Stellen ihrer Definitionsmenge differenzierbar. Die Berechnung von Ableitungen ist für viele Anwendungen von besonderer Bedeutung. Um eine handliche Formel zur Hand zu haben, ersetzen wir in (1.6) die etwas schwerfällige Benennung x_0 durch ein simples x und schreiben

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \tag{1.10}$$

für die Ableitung der Funktion f an der Stelle x. Diese Form zeigt uns auch recht schön an, dass die Ableitung (vorausgesetzt, sie existiert an allen Stellen x) selbst eine Funktion $f' : x \mapsto f'(x)$ ist – die **Ableitungsfunktion** (meist kurz als „Ableitung“ bezeichnet). Damit können wir Ableitungen nicht nur an einzelnen Stellen berechnen, deren Zahlenwerte vorgegeben sind, sondern ganz allgemein an *beliebigen* Stellen, an denen sie existieren.

Beispiel: Wir haben oben die Ableitung der durch $f(x) = x^2$ definierten Funktion f an der Stelle 3 berechnet. Nun berechnen wir die Ableitung dieser Funktion an einer beliebigen Stelle x: Die mittlere Änderungsrate (der Differenzenquotient) ist gegeben durch

$$\begin{aligned} &\text{mittlere Änderungsrate beim Übergang von } x \text{ zu } x+h = \\ &= \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \\ &= \frac{x^2 + 2\,x\,h + h^2 - x^2}{h} = \frac{2\,x\,h + h^2}{h} = 2\,x + h\,. \end{aligned} \tag{1.11}$$

Nun können wir den Grenzübergang $h \to 0$ durchführen. Klarerweise strebt $2\,x + h$ für $h \to 0$ gegen $2\,x$. Damit ist gezeigt, dass die Funktion f überall differenzierbar ist und dass ihre Ableitungsfunktion f' durch

$$f'(x) = 2\,x \tag{1.12}$$

gegeben ist.

Das Ermitteln der Ableitung einer Funktion nennen wir auch „eine Funktion differenzieren". Woher kommt diese Ausdrucksweise? Sehen Sie sich die Definition der mittleren Änderungsrate (1.4), die wir auch Differenzenquotient genannt haben, noch einmal an! Dort steht Δx für eine Änderung des x-Werts und Δf für die zugehörige Änderung des Funktionswerts. Wird Δx (also h) immer kleiner, so wird (wir nehmen an, dass f differenzierbar ist) auch Δf immer kleiner. Das Verhältnis (der Quotient) dieser beiden immer kleiner werdenden Größen strebt einem wohldefinierten Wert (eben der Ableitung f') zu. Für die Ableitung hat sich schon früh die Schreibweise

$$\frac{df}{dx} \tag{1.13}$$

eingebürgert, wobei man sich dx und df (sofern das überhaupt möglich ist) als „praktisch unendlich kleine" Änderungen der Stelle und des Funktionswerts (so genannte „infinitesimale" Größen) vorstellte. Mathematische Gedankenobjekte dieser Art wurden „Differentiale" genannt. Die Ableitung, in der Schreibweise (1.13) als „Quotient von Differentialen" gedeutet, wurde daher als **Differentialquotient** bezeichnet. Der Grenzübergang $h \to 0$ ist in diesem Sinn ein Übergang

$$\text{Differenzenquotient} \to \text{Differentialquotient}\,. \tag{1.14}$$

In technischen Anwendungen stellt man sich unter dx und df meist Änderungen vor, die *so klein* sind, dass ihr Quotient praktisch gleich der Ableitung ist. Das ist in Abbildung 1 in Form des kleinen grünen Steigungsdreiecks illustriert.

Für den Funktionswert der Ableitungsfunktion, $f'(x)$, werden auch oft die Schreibweisen

$$\frac{df(x)}{dx} \quad \text{oder} \quad \frac{df}{dx}(x) \quad \text{oder} \quad \frac{d}{dx}\,f(x)\,, \tag{1.15}$$

verwendet, wobei das Symbol $\dfrac{d}{dx}$ die Aufforderung „bilde die Ableitung nach x" bezeichnet. Unter Verwendung dieser äußerst nützlichen Schreibweise ist beispielsweise klar, dass mit

$$\frac{d}{dt}\Big(A\,\sin(\omega\,t)\Big) \tag{1.16}$$

die Ableitung der durch $f(t) = A\,\sin(\omega\,t)$ definierten Funktion f gemeint ist, wobei A und ω als Konstanten aufzufassen sind, die sich beim Übergang von t zu $t + h$ nicht ändern.

Wir erwähnen noch eine weitere Form, die Definition der Ableitung anzuschreiben: Bezeichnen wir in (1.6) die Stelle $x_0 + h$ als x, so ist $h = x - x_0$, und der Grenzübergang $h \to 0$ bedeutet, dass x gegen x_0 strebt. Das wird durch die Schreibweise $x \to x_0$ ausgedrückt. Anstelle von (1.6) können wir daher für die Ableitung von f an der Stelle x_0 auch schreiben

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\,. \tag{1.17}$$

Alle drei Formeln (1.6), (1.10) und (1.17) drücken in unterschiedlicher Schreibweise das Gleiche aus und finden sich in der mathematischen Literatur.

2 Ableitungen der elementaren Funktionen

Nachdem wir im vorigen Abschnitt erfolgreich die Ableitung der Funktion $x \mapsto x^2$ berechnet haben, stellt sich die Frage, wie die Ableitungen der anderen Funktionen, die Sie kennen, aussehen. Die Ableitungen von Polynomfunktionen können ganz analog berechnet werden wie oben anhand des Beispiels $x \mapsto x^2$ vorgeführt. In anderen Fällen ist die Herleitung nicht so einfach. Wir verzichten auf die Details der Begründungen und geben zunächst die Ableitungen der wichtigsten „elementaren" Funktionen an, aus denen dann (im darauffolgenden Abschnitt) die Ableitungen weiterer, aus diesen zusammengesetzten Funktionen gewonnen werden können. Dabei benutzen wir eine kompakte Schreibweise, die es uns erspart, jeder Funktion einen eigenen Namen zu geben: Wir setzen den Funktionsterm in Klammern und kennzeichnen die „Ableitung nach x" mit einem Strich. Das bedeutet, dass wir uns erlauben (obwohl es nicht ganz korrekt ist), anstelle von $f'(x)$ einfach $(f(x))'$ zu schreiben. Dass die Ableitung der Funktion $f : x \mapsto x^2$ durch $f'(x) = 2\,x$ (oder $f' : x \mapsto 2\,x$) gegeben ist, wird dann kurz durch

$$\left(x^2\right)' = 2\,x \tag{2.1}$$

ausgedrückt. Wenn es Ihnen lieber ist, können Sie stattdessen auch

$$\frac{d}{dx}\left(x^2\right) = 2\,x \qquad \text{oder einfach} \qquad \frac{d}{dx}\,x^2 = 2\,x \tag{2.2}$$

schreiben. Wann immer eine Funktion bereits einen Namen hat (wie z.B. $\sin$ für die Sinusfunktion), bleiben wir bei der Schreibweise, den Strich unmittelbar an diesen Namen zu hängen (also mit dem Symbol $\sin'$ die Ableitungsfunktion der Sinusfunktion und mit $\sin'(x)$ ihren Funktionswert an der Stelle x zu bezeichnen).

- **Ableitungen von Potenzfunktionen**[5]: Für jedes $r \in \mathbb{R}$ gilt

  $$(x^r)' = r\,x^{r-1}\,. \tag{2.3}$$

  Diese Regel sollten sie auf jeden Fall auswendig wissen! Als Spezialfall für $r = 2$ folgt daraus sofort (2.1). Für $r = 0$ folgt mit

  $$(1)' = 0 \tag{2.4}$$

[5] Für Potenzfunktionen siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

die (wenig überraschende) Erkenntnis, dass die Ableitung der konstanten Funktion 1 gleich 0 ist, und mit $r = 1$ erhalten wir

$$(x)' = 1\,, \tag{2.5}$$

was besagt, dass die lineare Funktion $x \mapsto x$ überall die Ableitung 1 besitzt. Mit $r = 3$ folgt

$$\big(x^3\big)' = 3\,x^2\,, \tag{2.6}$$

und weitere Spezialfälle mit $r = -1$, $r = -2$ und $r = \frac{1}{2}$ lauten

$$\big(x^{-1}\big)' = -x^{-2}\,, \qquad \big(x^{-2}\big)' = -2\,x^{-3}\,, \qquad \big(x^{1/2}\big)' = \frac{1}{2}\,x^{-1/2}\,, \tag{2.7}$$

was wir auch in der Form

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}\,, \qquad \left(\frac{1}{x^2}\right)' = -\frac{2}{x^3}\,, \qquad \big(\sqrt{x}\,\big)' = \frac{1}{2\,\sqrt{x}} \tag{2.8}$$

schreiben können. Es ist hilfreich, diese letzten drei Formeln auswendig zu kennen!

- **Ableitungen der Winkelfunktionen**[6]:

$$\sin'(x) = \cos(x) \tag{2.9}$$
$$\cos'(x) = -\sin(x) \tag{2.10}$$
$$\tan'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}\,. \tag{2.11}$$

Die ersten beiden dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken!

- **Ableitungen der inversen Winkelfunktionen**[7]:

$$\mathrm{asin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.12}$$
$$\mathrm{acos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \tag{2.13}$$
$$\mathrm{atan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}\,. \tag{2.14}$$

Die Struktur dieser Formeln (die Ableitung einer inversen Winkelfunktion ist *keine* inverse Winkelfunktion) sollten Sie sich merken!

- **Ableitungen der Exponentialfunktionen**[8]:

$$(e^x)' = e^x \tag{2.15}$$
$$(a^x)' = \ln(a)\,a^x \qquad \text{für } a > 0\,. \tag{2.16}$$

[6] Siehe das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.
[7] Siehe das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.
[8] Siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

Die erste dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken! Mit der Beziehung (2.15) haben wir den ersten wirklich handfesten Grund für die Wichtigkeit der Eulerschen Zahl e. Beachten Sie, dass e (in ihrer Rolle als Basis des natürlichen Logarithmus) auch in (2.16) eingeht: Selbst wenn wir bei der Besprechung der Exponential- und Logarithmusfunktionen beschlossen hätten, e zu ignorieren, wäre diese Zahl hier automatisch aufgetreten!

- **Ableitungen der Hyperbelfunktionen**[9]:

$$\sinh'(x) = \cosh(x) \tag{2.17}$$

$$\cosh'(x) = \sinh(x) \tag{2.18}$$

$$\tanh'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}\,. \tag{2.19}$$

- **Ableitungen der Logarithmusfunktionen**[10]:

$$\ln'(x) = \frac{1}{x} \tag{2.20}$$

$$\log_a{}'(x) = \frac{1}{\ln(a)\,x} \qquad \text{für } a > 0 \text{ und } a \neq 1\,. \tag{2.21}$$

Die erste dieser Formeln sollten Sie sich auf jeden Fall merken!

3 Ableitungsregeln

Um die Ableitungen von Summen, Vielfachen, Produkten, Quotienten und Verkettungen von Funktionen zu berechnen, deren Ableitungen bereits bekannt sind, stehen einige handliche Regeln zur Verfügung, die wir hier nicht beweisen, sondern lediglich wiedergeben, und die Sie kennen und anwenden können sollten:

- **Ableitung einer Summe**: Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist auch ihre Summe $f+g$ differenzierbar, und es gilt

$$(f+g)' = f' + g'\,. \tag{3.1}$$

In Worten: Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen.

Beispiel:

$$\left(x^2 + x^5\right)' = 2\,x + 5\,x^4\,. \tag{3.2}$$

- **Ableitung des Vielfachen einer Funktion**: Ist f eine differenzierbare Funktion und c eine reelle Zahl, so ist das c-fache von f, die Funktion $c\,f$, ebenfalls differenzierbar, und es gilt

$$(c\,f)' = c\,f'\,. \tag{3.3}$$

In Worten: Die Ableitung eines Vielfachen ist das Vielfache der Ableitung.

[9] Siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.
[10] Siehe das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

Beispiel:

$$\left(7\,x^2\right)' = 7 \cdot 2\,x = 14\,x\,. \tag{3.4}$$

- **Ableitung einer Linearkombination**: Eine Linearkombination von Funktionen ist eine „Summe aus Vielfachen“, beispielsweise eine Funktion der Form $a\,f + b\,g$, wobei f und g Funktionen und a und b reelle Zahlen sind. Aus (3.2) und (3.3) folgt, dass die Ableitung einer Linearkombination die Linearkombination der Ableitungen ist:

$$(a\,f + b\,g)' = a\,f' + b\,g'\,, \tag{3.5}$$

und entsprechende Regeln gelten für Linearkombinationen mit mehr als zwei Summanden.

Beispiel:

$$\begin{aligned}\left(7\,x^2 + 5\,x^3 - 4\,x^9 + 13\right)' &= 7 \cdot 2\,x + 5 \cdot 3\,x^2 - 4 \cdot 9\,x^8 = \\ &= 14\,x + 15\,x^2 - 36\,x^8\,. \end{aligned} \tag{3.6}$$

- **Ableitung eines Produkts** (**Produktregel**): Sind f und g differenzierbare Funktionen, so ist auch ihr Produkt $f\,g$ differenzierbar, und es gilt

$$(f\,g)' = f'\,g + f\,g'\,. \tag{3.7}$$

Beispiel:

$$\left(x^2\,\sin(x)\right)' = 2\,x \cdot \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)\,. \tag{3.8}$$

Durch mehrfache Anwendung von (3.7) auf Produkte mit mehr als zwei Faktoren ergeben sich weitere Regeln, wie beispielsweise

$$(f\,g\,h)' = f'\,g\,h + f\,g'\,h + f\,g\,h'\,. \tag{3.9}$$

- **Ableitung eines Quotienten** (**Quotientenregel**): Sind f und g differenzierbare Funktionen, wobei g im betrachteten Bereich von 0 verschieden sei, so ist auch ihr Quotient $\dfrac{f}{g}$ differenzierbar, und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'\,g - f\,g'}{g^2}\,. \tag{3.10}$$

Beispiel:

$$\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' = \frac{2\,x \cdot \sin(x) - x^2 \cdot \cos(x)}{\sin^2(x)}\,. \tag{3.11}$$

- **Ableitung einer Verkettung** (**Kettenregel**): Sind f und g differenzierbare Funktionen, deren Verkettung[11], d.h. die durch $u(x) = f(g(x))$ definierte Funktion u (auch als $f \circ g$ bezeichnet), gebildet werden kann, so ist diese differenzierbar, und es gilt

$$u'(x) = f'(g(x))\,g'(x)\,. \tag{3.12}$$

[11] Siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

Den Faktor $f'(g(x))$ können Sie sich als „Ableitung von f nach $g(x)$" vorstellen. Um ihn zu erhalten, wird so getan, als wäre $g(x)$ eine unabhängige Variable. Der Faktor $g'(x)$ wird als „innere Ableitung" bezeichnet.

Beispiel: Mit $f(x) = \sin(x)$ und $g(x) = x^2$ ist $u(x) = f(g(x)) = \sin(x^2)$ und

$$u'(x) = \cos(x^2) \cdot 2\,x \tag{3.13}$$

oder, in unserer kompakten Schreibweise,

$$\big(\sin(x^2)\big)' = \cos(x^2) \cdot 2\,x\,. \tag{3.14}$$

Den Faktor $\cos(x^2)$ erhalten Sie, indem Sie „$\sin(x^2)$ nach x^2 differenzieren", also so tun, als wäre x^2 eine unabhängige Variable. (Korrekter wäre die folgende Beschreibung: Sie berechnen die Ableitung von $\sin(x)$ nach x und setzen danach x^2 anstelle von x ein.) Der Faktor $2\,x$ ist die innere Ableitung.

Wird ein Quotient $\dfrac{f}{g}$ als Produkt $f\,\dfrac{1}{g}$ aufgefasst, so kann seine Ableitung anstatt mit der Quotientenregel (3.10) auch mit der Produktregel (3.7) und der Kettenregel (3.12) berechnet werden.

Beispiel: Die gleiche Funktion wie in (3.11), nur diesmal anders differenziert:

$$\begin{aligned}\left(\frac{x^2}{\sin(x)}\right)' &= \left(x^2\,\frac{1}{\sin(x)}\right)' = \big(x^2\big)'\,\frac{1}{\sin(x)} + x^2\,\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)' = \\ &= 2\,x\,\frac{1}{\sin(x)} - x^2\,\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)}\,,\end{aligned} \tag{3.15}$$

was das Gleiche ist wie das Ergebnis von (3.11), nur anders angeschrieben. Dabei wurde $\dfrac{1}{\sin(x)}$ als Verkettung der Funktion $x \mapsto \dfrac{1}{x}$ mit der Sinusfunktion aufgefasst und mit Hilfe der Kettenregel

$$\left(\frac{1}{\sin(x)}\right)' = -\frac{\cos(x)}{\sin^2(x)} \tag{3.16}$$

berechnet. Die innere Ableitung ist hier $\cos(x)$.

In formalerer Schreibweise sieht die Kettenregel so aus:

$$(f \circ g)' = (f' \circ g)\,g'\,. \tag{3.17}$$

Eine andere, etwas saloppere Beschreibung dieser Regel (aber eine, die einen Hauch von Beweis an sich hat), ist die folgende: Hängt f von g ab und g von x, so ist

$$\frac{df}{dx} = \frac{df}{dg}\,\frac{dg}{dx}\,. \tag{3.18}$$

Mit Hilfe dieser Regeln können die Ableitungen beliebiger Funktionen berechnet werden, die sich durch Summen, Vielfache, Linearkombinationen, Produkte, Quotienten und Verkettungen jener elementaren Funktionen ausdrücken lassen, deren Ableitungen wir im vorigen Abschnitt angegeben haben. Das Differenzieren solcher Funktionen funktioniert also sozusagen nach „Kochrezept", und daher können das auch Computeralgebra-Systeme (wie *Mathematica* oder *GeoGebra*) sehr gut. Machen Sie sich bitte damit vertraut, wie das Differenzieren mit dem Computerwerkzeug Ihrer Wahl durchgeführt wird, und nutzen Sie es zur Berechnung von Ableitungen oder zur Kontrolle Ihrer auf dem Papier erzielten Ergebnisse!

4 Höhere Ableitungen

Ist die Ableitung f' einer differenzierbaren Funktion f wieder differenzierbar, so kann die Ableitung der Ableitung (die *zweite Ableitung*), bezeichnet mit f'' oder[12] $\dfrac{d^2 f}{dx^2}$, gebildet werden. Ist diese differenzierbar, so kann die *dritte Ableitung* f''' (auch als $\dfrac{d^3 f}{dx^3}$ geschrieben) gebildet werden, usw. In diesem Sinn wird die Ableitung auch als *erste Ableitung* bezeichnet. Werden höhere Ableitungen als die zweite benötigt, so ist es üblich, die n-te Ableitung von f als $f^{(n)}$ zu bezeichnen, wobei $f^{(0)}$ für die Funktion f selbst steht.

> Anwendungsbeispiel: Wird die Zeit durch die Variable t dargestellt und bezeichnet $s(t)$ jene Kilometermarkierung entlang einer Straße, bei der sich ein Fahrzeug zum Zeitpunkt t befindet, so ist die Ableitung $s'(t)$ die Momentangeschwindigkeit des Fahrzeugs zur Zeit t. Die zweite Ableitung $s''(t)$ ist dann die *Beschleunigung* des Fahrzeugs zur Zeit t. Für die Ableitung nach der Zeit wird manchmal auch die Schreibweise[13] $\dot{s}(t)$ und für die zweite Ableitung die Schreibweise[14] $\ddot{s}(t)$ verwendet.

Alle Funktionen, die in den bisherigen Skripten besprochen wurden, sind an fast allen Stellen ihrer Definitionsmenge *beliebig oft* differenzierbar.

5 Anwendungen des Ableitungskonzepts

Wir geben nun einen knappen Überblick über einige wichtige Anwendungen des in den bisherigen Abschnitten entwickelten Konzepts der Ableitung, wobei wir hinreichende Differenzierbarkeit (einschließlich der Existenz und Stetigkeit der benötigten höheren Ableitungen) stillschweigend voraussetzen.

- **Näherungen**:

  Die Ableitung wird aus dem Differenzenquotienten (1.4) durch den Grenzüberganz $h \to 0$ gewonnen. Ist h sehr klein[15], aber $\neq 0$, so wird der Differenzenquotient zwar nicht unbedingt gleich der Ableitung sein, aber zumindest einen Näherungswert für sie darstellen.

[12] Ausgesprochen „ d zwei f nach dx Quadrat".
[13] Ausgesprochen „s Punkt".
[14] Ausgesprochen „s zwei-Punkt".
[15] Genau genommen meinen wir hier und im Folgenden mit einem „kleinen h" ein h, dessen Betrag klein ist, denn h darf ja auch negativ sein.

Für kleines h können wir daher schreiben

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \approx f'(x_0)\,, \tag{5.1}$$

woraus mit

$$f(x_0 + h) \approx f(x_0) + h\, f'(x_0) \qquad \text{oder} \qquad \Delta f \approx f'(x_0)\, \Delta x \tag{5.2}$$

eine nützliche Methode folgt, um näherungsweise anzugeben, wie sich der Wert einer Funktion beim Übergang von einer Stelle x_0 zu einer sehr nahe benachbarten Stelle $x_0 + h$ ändert.

Beispiel: Sei $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$. Der Wert dieser Funktion an der Stelle 1 ist $f(1) = \dfrac{1}{1+1^2} = \dfrac{1}{2} = 0.5$. Nun nehmen wir an, eine Fragestellung erfordert es, Funktionswerte in der Nähe der Stelle 1 zu kennen. Wie groß ist beispielsweise (ungefähr) der Funktionswert an der Stelle 1.001, d.h. $f(1.001)$? Mit

$$f'(x) = -\frac{2\,x}{(1+x^2)^2}\,, \qquad \text{daher} \qquad f'(1) = -\frac{1}{2} \tag{5.3}$$

und (5.2) berechnen wir

$$\begin{aligned} f(1.001) &= f(1 + 0.001) \approx f(1) + 0.001\, f'(1) = \\ &= \frac{1}{2} - 0.001 \cdot \frac{1}{2} = 0.4995. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Das ist recht nahe am tatsächlichen Wert $f(1.001) = 0.4995002499998751\ldots$.

Mit der gleichen Methode berechnen wir ganz allgemein die Funktionswerte in der Nähe der Stelle 1:

$$f(1+h) \approx f(1) + h\, f'(1) = \frac{1}{2} - h \cdot \frac{1}{2} = \frac{1-h}{2}\,. \tag{5.5}$$

Das Ergebnis ist ein in h linearer Ausdruck, mit dem viel leichter umgegangen werden kann als mit der exakten Version

$$f(1+h) = \frac{1}{1 + (1+h)^2}\,. \tag{5.6}$$

Die Genauigkeit solcher Näherungen kann (ebenfalls mit Hilfe der Differentialrechnung) weiter hochgetrieben werden und führt zur Darstellung von Funktionen als Potenzreihen[16].

[16] Für zwei Beispiele siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

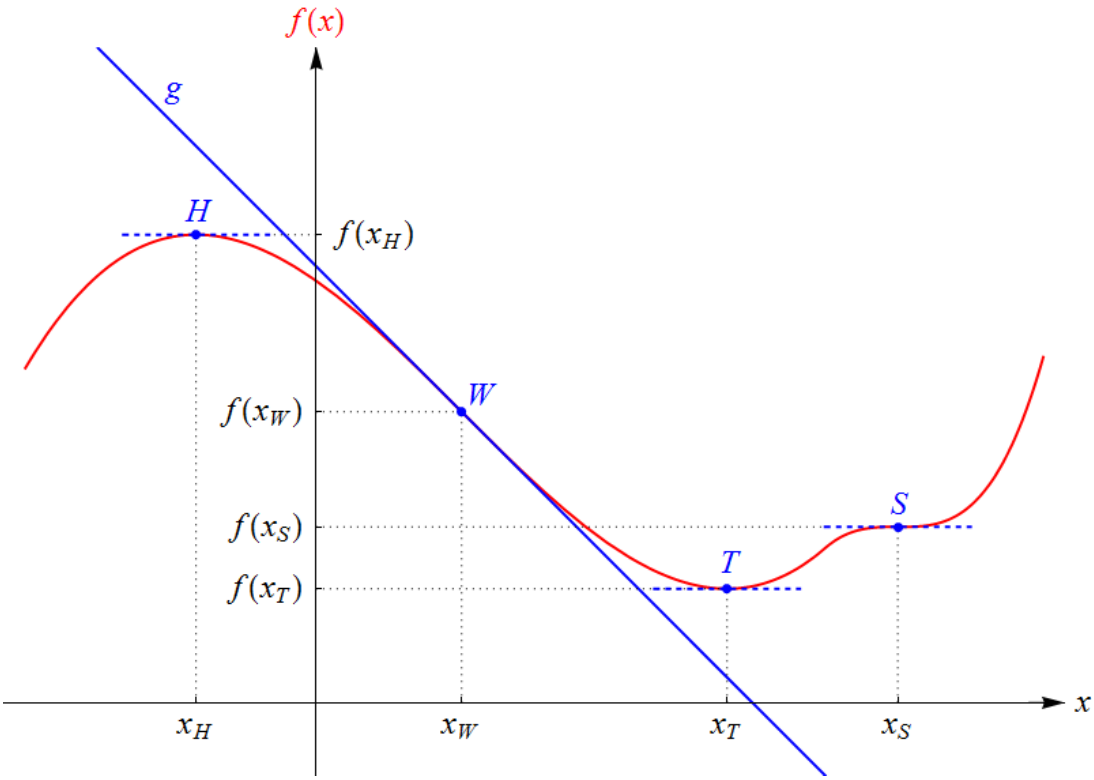


Abbildung 3: Markante Stellen und Punkte:
– lokale Maximumstelle x_H, Hochpunkt $H = (x_H, f(x_H))$
– Wendestelle x_W, Wendepunkt $W = (x_W, f(x_W))$, Wendetangente g
– lokale Minimumstelle x_T, Tiefpunkt $T = (x_T, f(x_T))$
– Sattelstelle x_S, Sattelpunkt $S = (x_S, f(x_S))$
Strichliert angedeutet sind die „horizontalen“ Tangenten an Stellen, an denen die Ableitung gleich 0 ist.

- **Extremwertaufgaben**:

  Die Differentialrechnung stellt eine sehr einfache Methode zur Verfügung, um die lokalen Extremstellen[17] einer Funktion f zu ermitteln. An jeder solchen Stelle ist die Tangente an den Graphen von f „horizontal“, hat also den Anstieg 0 (siehe Abbildung 3). Das bedeutet, dass an jeder lokalen Extremstelle x_0

  $$f'(x_0) = 0 \tag{5.7}$$

  gilt: Lokale Extremstellen sind Nullstellen der Ableitungsfunktion. Daher befinden sich alle lokalen Extremstellen unter den Lösungen der Gleichung $f'(x) = 0$. Nun ist Vorsicht angebracht: Nicht jede Nullstelle der Ableitung ist eine lokale Extremstelle! (Das zeigt das Beispiel $x \mapsto x^3$. Die Ableitung dieser Funktion an der Stelle 0 ist gleich 0, doch die Stelle 0 ist keine lokale Extremstelle.) Aber immerhin erhalten wir durch die Lösung der Gleichung $f'(x) = 0$ (in der Regel nur einige wenige) *Kandidaten* für lokale Extremstellen. Diese können wir dann einzeln darauf untersuchen, ob sie lokale Extremstellen sind

[17] Zum Begriff der lokalen Extremstellen (lokale Minimum- und Maximumstellen) siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

oder nicht. Das kann beispielsweise durch einen Vergleich ausgewählter Funktionswerte geschehen.

> Beispiel: Sei $f : x \mapsto x^2 - 2\,x$. Dann ist $f'(x) = 2\,x - 2$. Die Gleichung $f'(x) = 0$ lautet in diesem Fall $2\,x - 2 = 0$. Sie hat eine einzige Lösung, $x_0 = 1$. Vergleichen wir den Funktionswert $f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 = -1$ mit je einem Funktionswert an einer Stelle links und rechts von 1, also etwa $f(0) = 0$ und $f(2) = 0$, so ist klar, dass die Stelle 1 nur ein lokales Minimum sein kann. (Ein Ergebnis, das nicht überraschen sollte, da wir die Eigenschaften der quadratischen Funktionen bereits ausführlich besprochen haben[18].)

Mit Hilfe der zweiten Ableitung können wir ein anderes Kriterium formulieren, mit dem sich manchmal entscheiden lässt, ob ein Kandidat tatsächlich eine lokale Extremstelle ist:

- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$, so ist x_0 eine lokale Minimumstelle.
  (Beispiel: $f : x \mapsto x^2$, $x_0 = 0$, $f''(0) = 2 > 0$.)
- Ist $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$, so ist x_0 eine lokale Maximumstelle.
  (Beispiel: $f : x \mapsto -x^2$, $x_0 = 0$, $f''(0) = -2 < 0$.)

Gilt allerdings sowohl $f'(x_0) = 0$ als auch $f''(x_0) = 0$, so *kann* es sich um eine lokale Extremstelle handeln (Beispiel: $f : x \mapsto x^4$, $x_0 = 0$ ist Minimumstelle), aber das ist nicht garantiert! Ist x_0 in einem solchen Fall keine lokale Extremstelle, so heißt x_0 *Sattelstelle* (siehe Abbildung 3). (Beispiel: $f : x \mapsto x^3$, $x_0 = 0$.)

Rechnen Sie die hier in Klammern angegebenen Beispiele nach und sehen Sie sich die Graphen der Funktionen an!

- **Kurvendiskussionen**:

  Mit diesem Begriff ist in der Regel die Analyse von Funktionsgraphen (bzw. von Funktionseigenschaften, die eng mit dem Graphen verknüpft sind) gemeint. Was sagt uns die Ableitung einer Funktion f über deren Graphen (und damit über die Funktion selbst)?

  - Lokale Extremstellen wurden bereits diskutiert. Die entsprechenden Punkte am Graphen heißen Hochpunkte (im Fall eines lokalen Maximums) und Tiefpunkte (im Fall eines lokalen Minimums), siehe Abbildung 3.
  - Monotonie[19]:
    - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) \geq 0$, so ist f in diesem Intervall monoton wachsend. Der Graph fällt mit zunehmendem x nicht ab.
    - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) > 0$, so ist f in diesem Intervall streng monoton wachsend. Der Graph steigt mit zunehmendem x an.
    - ☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) \leq 0$, so ist f in diesem Intervall monoton fallend. Der Graph steigt mit zunehmendem x nicht an.

[18] Siehe das Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen*.
[19] Zum Begriff der Monotonie siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f'(x) < 0$, so ist f in diesem Intervall streng monoton fallend. Der Graph fällt mit zunehmendem x ab.

Stellen, an denen sich das Monotonieverhalten von streng monoton wachsend auf streng monoton fallend (oder umgekehrt) ändert, sind lokale Extrema. Bei der in Abbildung 3 skizzierten Funktion sind das die Stellen x_H und x_T.

– Krümmungsverhalten:

☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f''(x) > 0$, so ist der Graph von f in diesem Intervall linksgekrümmt. Wenn Sie sich vorstellen, ihn mit dem Fahrrad entlang zu fahren (sodass x zunimmt), so müssen Sie (wenn Sie von „oben" auf ihn schauen wie auf eine Landkarte) nach links lenken. Die Funktion f ist in diesem Intervall konvex[20].

☐ Gilt für alle x in einem Intervall $f''(x) < 0$, so ist der Graph von f in diesem Intervall rechtsgekrümmt. Wenn Sie sich vorstellen, ihn mit dem Fahrrad entlang zu fahren, so müssen Sie nun nach rechts lenken. Die Funktion f ist in diesem Intervall konkav.

– Ändert sich das Krümmungsverhalten an einer Stelle x_0 (von linksgekrümmt auf rechtsgekrümmt oder umgekehrt), so heißt x_0 Wendestelle, der zugehörige Punkt $(x_0, f(x_0))$ am Graphen Wendepunkt (siehe Abbildung 3). An einem Wendepunkt „überquert" die Tangente (die so genannte Wendetangente) den Graphen, wie in Abbildung 3 illustriert. Fahren Sie einen solchen Graphen mit einem Fahrrad entlang, so müssen Sie beim Wendepunkt (für einen Moment) geradeaus lenken. An einer Wendestelle gilt $f''(x_0) = 0$. Eine Wendestelle, an der zusätzlich $f'(x_0) = 0$ gilt (für die also die Wendetangente „horizontal" ist), ist eine Sattelstelle.

Achtung: Eine Stelle x_0, an der $f''(x_0) = 0$ gilt, ist nicht unbedingt eine Wendestelle! (Beispiel: $f : x \mapsto x^4$, $x_0 = 0$ ist Minimumstelle und daher keine Wendestelle.)

Die Nutzung der Ableitung, um das Verhalten von Funktionen aufzudecken, gehört in den meisten Anwendungsgebieten der Mathematik zum „Handwerkszeug", das man einigermaßen gut beherrschen sollte.

- **Differentialgleichungen**:

In zahlreichen Anwendungen steht man vor der Situation, dass unser Wissen über eine Funktion zunächst durch ihre momentane Änderungsrate ausgedrückt ist und dass wir auf der Basis dieses Wissens mehr über die Funktion erfahren wollen.

Als Beispiel möge der radioaktive Zerfall dienen: Die in einer Substanz enthaltene Menge eines radioaktiven Bestandteils zum Zeitpunkt t sei durch $N(t)$ gegeben. Die Änderung[21] dN von N während eines kurzen Zeitintervalls dt ist proportional zu N (d.h. der noch vorhandenen Menge) und proportional zu dt (der Dauer des betrachteten Zeitintervalls).

[20] Für die Begriffe konvex und konkav siehe das Skriptum *Der Funktionenzoo*.

[21] Wir deuten hier die Symbole dt und dN so, wie es in angewandten Wissenschaften oft gemacht wird: als *sehr kleine* Änderungen.

Mit der Proportionalitätskonstante λ, der so genannten *Zerfallskonstante*, modellieren wir den Zerfall in der Form

$$dN = -\lambda\, N\, dt \tag{5.8}$$

oder, nach Division beider Seiten durch dt, als

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda\, N, \tag{5.9}$$

wobei wir die linke Seite, da dt und dN *sehr* klein (um nicht zu sagen „unendlich klein") sind, als Differentialquotient, d.h. als Ableitung interpretieren. Wir können (5.9) also genauso gut in der Form

$$N'(t) = -\lambda\, N(t) \tag{5.10}$$

anschreiben. Das ist eine Differentialgleichung. Eine Lösung ist eine Funktion, deren Ableitung gleich „$-\lambda$ mal sie selbst" ist. Die *allgemeine* Lösung ist die Menge *aller* Funktionen, für die das der Fall ist. Wir wollen hier nicht über Lösungsmethoden sprechen, aber da diese Differentialgleichung so einfach ist, können wir ihre Lösung mehr oder weniger erraten. Die allgemeine Lösung lautet

$$N(t) = C\, e^{-\lambda\, t}, \tag{5.11}$$

wobei C eine frei wählbare Konstante ist. (Überprüfen Sie, dass (5.11) die Differentialgleichung (5.10) erfüllt!) Wir finden also als Ergebnis die Formel für das exponentielle Abklingen[22]. Da $N(0) = C$ ist, hat C die Bedeutung der Anfangsmenge zum Zeitpunkt 0. Wir können (5.11) daher auch in der Form

$$N(t) = N(0)\, e^{-\lambda\, t} \tag{5.12}$$

anschreiben. So (oder in der Schreibweise $N(t) = N_0\, e^{-\lambda\, t}$) steht sie in den meisten Physikbüchern.

Die Grundgleichungen zahlreicher physikalischer und technischer Anwendungsbereiche, in denen räumlich und zeitlich veränderliche Größen auftreten, enthalten deren Ableitungen, sind also Differentialgleichungen.

[22] Siehe dazu auch das Skriptum *Exponential- und Logarithmusfunktionen und ihre Graphen*.

6 Partielle Ableitungen

Hängt eine Größe von mehreren anderen Größen ab, so benutzen wir Funktionen in mehreren Variablen[23]. Eine Funktion f in zwei Variablen x und y ist eine Zuordnung $(x,y) \mapsto f(x,y)$. Die partielle Ableitung von f nach der ersten Variable x erhalten wir, indem wir die zweite Variable y als Konstante betrachten und nach der ersten Variable x differenzieren. Schreibweisen dafür sind:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) \quad \text{oder} \quad \frac{\partial}{\partial x}\,f(x,y). \tag{6.1}$$

In analoger Weise ist die partielle Ableitung nach der zweiten Variable y definiert.

Beispiel für eine partielle Ableitung nach x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^3\,y^2 - 7\,x\,y + 2\,y^5 + x\right) = 3\,x^2\,y^2 - 7\,y + 1\,, \tag{6.2}$$

und für die partielle Ableitung der gleichen Funktion nach y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(x^3\,y^2 - 7\,x\,y + 2\,y^5 + x\right) = 2\,x^3\,y - 7\,x + 10\,y^4\,. \tag{6.3}$$

Dieses Skriptum wurde erstellt im Juni 2015 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen“ (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Es wurde in den Jahren 2015 – 2018 unter Mitwirkung von Harald Stockinger mehrmals korrigiert und überarbeitet. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.

[23] Siehe dazu das Skriptum *Der Funktionenzoo*.