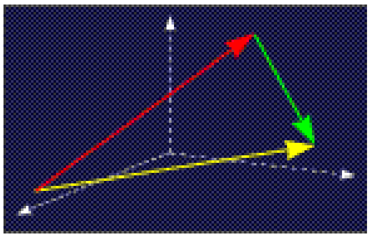
mathe online
Skripten
http://www.mathe-online.at/skripten/



Wurzeln

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum wird besprochen, was Quadratwurzeln und höhere Wurzeln sind und wie man mit ihnen rechnet.

1 Quadratwurzeln

Im Rahmen der Menge $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen kann gefragt werden, ob es eine Zahl gibt, deren Quadrat gleich 4 ist. Die Antwort: Es gibt sogar zwei solche Zahlen[1], nämlich -2 und 2. Die positive dieser beiden, also 2, nennen wir die **Quadratwurzel** (kurz **Wurzel**) aus 4 und bezeichnen sie mit dem Symbol $\sqrt[2]{4}$ oder kurz $\sqrt{4}$. Also:

$$\sqrt{4} = 2. \tag{1.1}$$

Lässt sich das für alle reellen Zahlen verallgemeinern?

- Die Wurzel aus 0: Es gibt nur eine einzige reelle Zahl, deren Quadrat 0 ist, nämlich 0 selbst. Daher ist
$$\sqrt{0} = 0. \tag{1.2}$$
- Wurzeln aus positiven Zahlen: Für jede positive reelle Zahl a gibt es zwei Zahlen, deren Quadrat gleich a ist. Die positive nennen wir die Wurzel aus a und bezeichnen sie mit $\sqrt{a}$. Die andere ist dann $-\sqrt{a}$.
- Wurzeln aus negativen Zahlen? Nein! Da im Rahmen der reellen Zahlen kein Quadrat negativ sein kann, besitzt eine negative Zahl keine Quadratwurzel[2].

[1] Es ist auch gar nicht schwer, das einzusehen: Ist x eine Zahl, deren Quadrat gleich 4 ist, so muss also gelten $x^2 = 4$, oder, anders angeschrieben, $x^2 - 4 = 0$. Das können wir auch in der Form $(x+2)(x-2) = 0$ schreiben. Wenn aber nun das Produkt zweier reeller Zahlen gleich 0 ist, muss zumindest eine von ihnen verschwinden. Es muss also entweder $x + 2 = 0$ sein (dann ist $x = -2$) oder $x - 2 = 0$ (dann ist $x = 2$). Dritte Möglichkeit gibt es keine. Voilà!

[2] Es gibt einen erweiterten Zahlbegriff – die komplexen Zahlen –, der zulässt, dass ein Quadrat negativ ist. Wir wollen uns hier aber auf die reellen Zahlen beschränken.

Die Wurzel aus jeder positiven reellen Zahl ist also wieder eine positive reelle Zahl, beispielsweise $\sqrt{\frac{3}{7}}$ oder $\sqrt{\pi}$. In Berechnungen treten oft Wurzeln aus natürlichen Zahlen auf, also $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{4}$, $\sqrt{5}$ usw. Es lässt sich zeigen, dass die Wurzel aus einer natürlichen Zahl entweder wieder eine natürliche Zahl oder eine irrationale Zahl ist. In die erste Kategorie fallen nur die Wurzeln der „Quadratzahlen“ 0, 1, 4, 9, 16, 25 usw. Alle anderen Wurzeln natürlicher Zahlen können in Dezimaldarstellung nur näherungsweise angegeben werden. So ist beispielsweise

$$\sqrt{2} \approx 1.414213562 \tag{1.3}$$
$$\sqrt{3} \approx 1.732050808 \tag{1.4}$$
$$\sqrt{5} \approx 2.236067977. \tag{1.5}$$

Kommen in einer Berechnung solche Wurzeln vor, so ist die exakte Schreibweise mit dem Wurzelsymbol meist der Verwendung von Näherungswerten vorzuziehen. Ist beispielsweise die Länge d der Diagonale eines Quadrats mit Seitenlänge 1 gesucht, so ergibt sich aus dem Satz von Pythagoras (angewandt auf das rechtwinkelige Dreieck mit den Seiten des Quadrats als Katheten und der Diagonale als Hypotenuse) $d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$, daher $d = \sqrt{2}$. Will man den ungefähren Zahlenwert auch angeben, so kann man das in der Form $d = \sqrt{2} \approx 1.4142$ tun. Eine Antwort wie $d = 1.4142$ ist genau genommen falsch!

Um Wurzeln zu multiplizieren und zu dividieren, können die praktischen Rechenregeln

$$\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b} \tag{1.6}$$

und

$$\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \tag{1.7}$$

verwendet werden (wobei im letzten Fall natürlich b nicht gleich 0 sein darf). So ist beispielsweise

$$\sqrt{\frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}\,. \tag{1.8}$$

Steht eine Wurzel im Nenner eines Bruchs, so kann man mit folgendem Trick den „Nenner rational machen“:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\,. \tag{1.9}$$

Hier wurde der Bruch mit $\sqrt{2}$ erweitert, und es wurde verwendet, dass $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = 2$ ist.

Um Brüche, die Wurzeln enthalten, zu addieren, kann ebenfalls ein geeignetes Erweitern helfen, wie das Beispiel

$$\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}} = \frac{4}{\sqrt{6}} - \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \tag{1.10}$$

zeigt. (Wenn man will, kann man das noch unter Anwendung des Tricks, der in (1.9) vorgestellt wurde, zu $\frac{1}{6}\sqrt{6}$ umformen.)

2 Höhere Wurzeln

Gibt es eine reelle Zahl, deren dritte Potenz[3] gleich 8 ist? Ja, es gibt (in der Menge der reellen Zahlen) *genau eine* solche Zahl, nämlich 2. Wir nennen sie die **dritte Wurzel** (**Kubikwurzel**) aus 8 und bezeichnen sie mit $\sqrt[3]{8}$. Also:

$$\sqrt[3]{8} = 2. \tag{2.1}$$

Ganz allgemein gibt es für jede nichtnegative reelle Zahl a genau eine reelle Zahl, deren dritte Potenz gleich a ist, und die wir in der Form $\sqrt[3]{a}$ anschreiben. Analog zu (1.6) und (1.7) gelten für dritte Wurzeln die Rechenregeln

$$\sqrt[3]{ab} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{b} \tag{2.2}$$

und

$$\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{b}}\ , \tag{2.3}$$

wobei im letzten Fall natürlich b nicht gleich 0 sein darf.

Da beim Bilden von dritten Potenzen das Vorzeichen erhalten bleibt, wie in $(-2)^3 = -8$, wäre man versucht, $\sqrt[3]{-8} = -2$ zu schreiben. Das sollte aber mit Vorsicht gemacht werden und gilt in manchen Kreisen sogar als verpönt[4].

Ganz allgemein können n-te Wurzeln mit beliebigen natürlichen Zahlen $n \geq 2$ berechnet werden. Auch hierbei beschränken wir uns darauf, solche Wurzeln nur aus nichtnegativen Zahlen zu ziehen, also $\sqrt[n]{a}$ für $a \geq 0$. Für Produkte und Quotienten höherer Wurzeln gelten die Rechenregeln

$$\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} \tag{2.4}$$

und

$$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ . \tag{2.5}$$

Wurzeln von Wurzeln können mit Hilfe der Rechenregel

$$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m\cdot n]{a} \tag{2.6}$$

ermittelt werden, und für Potenzen gilt

$$\sqrt[m]{a^n} = (\sqrt[m]{a})^n, \tag{2.7}$$

wobei m und n beliebige positive natürliche Zahlen sind. Für Produkte höherer Wurzeln wie $\sqrt[m]{a}\sqrt[n]{a}$ und noch komplexere Berechnungen wird besser die nun folgende Potenzschreibweise verwendet.

[3] Die dritte Potenz einer reellen Zahl x ist x^3.

[4] Der Grund dafür liegt in den komplexen Zahlen, die hier nicht das Thema sind.

3 Potenzschreibweise von Wurzeln

Quadratwurzeln und höhere Wurzeln können als **Potenzen** aufgefasst werden, deren Exponenten Kehrwerte von positiven natürlichen Zahlen sind. Der Grund für die Nützlichkeit der Potenzschreibweise besteht in den allgemeinen (und sehr praktischen) Rechenregeln

$$a^p a^q = a^{p+q} \qquad \text{und} \qquad (a^p)^q = a^{p\,q} \tag{3.1}$$

sowie

$$(ab)^q = a^q\, b^q \qquad \text{und} \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^q = \frac{a^q}{b^q}\ , \tag{3.2}$$

die für beliebige rationale Zahlen p, q und für beliebige positive reelle a, b gelten. Um sie verwenden zu können, müssen wir festlegen, was „a hoch einer rationalen Zahl" bedeutet:

$$a^0 = 1 \tag{3.3}$$

$$a^1 = a \tag{3.4}$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a \cdot a}_{n \text{ mal}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.5}$$

$$a^{1/n} = \sqrt[n]{a} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.6}$$

$$a^{-1/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \qquad \text{für } n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.7}$$

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m} \qquad \text{für } m, n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.8}$$

$$a^{-m/n} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}} \qquad \text{für } m, n = 1, 2, 3 \ldots \tag{3.9}$$

Mit (3.6) und (3.7) kann insbesondere

$$a^{1/2} = \sqrt{a} \qquad \text{und} \qquad a^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{a}} \tag{3.10}$$

gesetzt werden.

Diese Schreibweise zusammen mit den Rechenregeln (3.1) und (3.2) kann wahre Wunder bewirken! Mit ihrer Hilfe können Sie beispielsweise relativ leicht Berechnungen wie

$$\sqrt[4]{5}\,\sqrt[3]{5} = 5^{1/4}\,5^{1/3} = 5^{1/4+1/3} = 5^{7/12} = \sqrt[12]{5^7} \tag{3.11}$$

oder

$$\sqrt[3]{\frac{2}{5}}\,\sqrt[6]{10} = \frac{2^{1/3}}{5^{1/3}}\,10^{1/6} = \frac{2^{1/3}}{5^{1/3}}\,(2\cdot 5)^{1/6} = 2^{1/3+1/6}\,5^{-1/3+1/6} = 2^{1/2}\,5^{-1/6} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{5}} \tag{3.12}$$

durchführen. Auch alle früher angeschriebenen Regeln (1.6), (1.7), (2.2), (2.3), (2.4), (2.5), (2.6) und (2.7) folgen aus (3.1) und (3.2). Angesichts dieses mächtigen Formalismus empfiehlt es sich, bei komplexen Ausdrücken mit höheren Wurzeln auf die Wurzelschreibweise ganz zu verzichten und durchgängig die Potenzschreibweise zu verwenden.

4 Wie sollen Zahlen angegeben werden, die Wurzeln enthalten?

Wie sollen Zahlen, die Wurzeln enthalten, angegeben werden, insbesondere wenn sie als Ergebnisse von Berechnungen auftreten? Diese Frage ist nicht eindeutig zu beantworten. So bezeichnen beispielsweise $\sqrt{8}$ und $2\sqrt{2}$ die gleiche reelle Zahl (denn $\sqrt{8} = \sqrt{4 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2}$), und in einem gewissen Sinn ist es eine Geschmacksfrage, welche dieser beiden Darstellungen die „schönere" oder die „einfachere" ist. Die meisten MathematikerInnen würden wahrscheinlich die Form $2\sqrt{2}$ bevorzugen, weil sie ausdrückt, dass das Doppelte von $\sqrt{2}$ gemeint ist und $\sqrt{2}$ „elementarer" als $\sqrt{8}$ erscheint. Nach dieser Philosophie sollte man versuchen, natürliche Zahlen unter dem Wurzelsymbol so klein wie möglich zu halten, um Vereinfachungsmöglichkeiten nicht zu übersehen. Das kann sich etwa auszahlen, wenn eine Berechnung auf $\sqrt{8}+\sqrt{18}$ führt. Mit

$$\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4 \cdot 2} + \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{2} + \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2} \tag{4.1}$$

wird dann ganz offensichtlich eine Vereinfachung erzielt.

Insbesondere wenn unter dem Wurzelsymbol eine größere natürliche Zahl steht, ist es sinnvoll, sie in Faktoren zu zerlegen, um herauszufinden, ob sich nicht doch aus einem ihrer Teile die Wurzel innerhalb der natürlichen Zahlen ziehen lässt. Tritt z.B. bei einer Berechnung $\sqrt{243}$ auf, und wird erkannt, dass $243 = 81 \cdot 3$ ist, kann

$$\sqrt{243} = \sqrt{81 \cdot 3} = \sqrt{81} \cdot \sqrt{3} = 9\sqrt{3} \tag{4.2}$$

vereinfacht werden.

Tritt $\sqrt{6}$ als Ergebnis einer Berechnung auf, so könnte das auch in der Form $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$ angeschrieben werden. Welche dieser beiden Darstellungen „schöner" ist, ist hier weniger klar, und so sei die Entscheidung darüber ihrem persönlichen ästhetischen Empfinden überlassen, ebenso wie die Frage, ob statt $\frac{1}{\sqrt{2}}$ besser $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ oder $2^{-1/2}$ geschrieben werden soll.

Ähnliche Überlegungen können angestellt werden, wenn höhere Wurzeln und Wurzeln aus Potenzen auftreten. Ob die Schreibweise $2\sqrt[3]{2}$ oder $2^{4/3}$ vorzuziehen ist, ist wieder Geschmackssache, aber $16^{3/4}$ sollte besser als 8 angeschrieben werden! Im Einzelfall kann es sich also lohnen, ein vermeintliches Endergebnis noch auf derartige Vereinfachungen hin abzuklopfen!

Dieses Skriptum wurde erstellt im April 2014 im Rahmen des Projekts „Entwicklung und Durchführung von Qualitätssicherungsmaßnahmen in Brückenkursen" (http://www.mathe-online.at/projekte/QualitaetssicherungBrueckenkurse.html), einer Kooperation von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien (http://www.technikum-wien.at/). Überarbeitet im November 2015 und im April 2017 unter Mitwirkung von Harald Stockinger. Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.