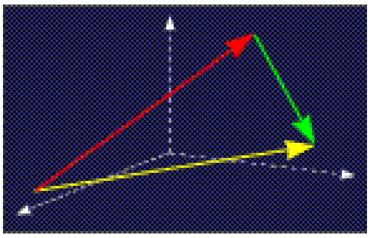


Komplexe Zahlen und die komplexe Ebene

Franz Embacher

Fakultät für Mathematik der Universität Wien
E-mail: franz.embacher@univie.ac.at
WWW: http://homepage.univie.ac.at/franz.embacher/

In diesem Skriptum werden die komplexen Zahlen und ihre Grundrechnungsarten, quadratische Gleichungen in komplexen Variablen und die Darstellung komplexer Zahlen als Punkte einer Ebene vorgestellt.

1 Was sind komplexe Zahlen?

Begegnet man komplexen Zahlen zum ersten Mal, so kommen sie zunächst als „abstrakte Rechenobjekte" daher, die auf den ersten Blick nichts mit der Wirklichkeit zu tun haben. Doch der Schein trügt! Die komplexen Zahlen zählen zu den wichtigsten Objekten, die die Mathematik kennt. Sie werden in vielen wissenschaftlichen und technischen Gebieten für ganz praktische Zwecke eingesetzt und erleichtern das Leben ungemein! Leider muss man sich, um einen Zugang zu ihnen zu finden und sich mit ihnen anzufreunden, eine Zeitlang mit „reiner Mathematik" beschäftigen, bevor langsam nach und nach die ersten Anwendungen und die Vorteile, die die Verwendung komplexer Zahlen bietet, sichtbar werden. Das vorliegende Skriptum und das folgende (*Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*) sind diesen Vorarbeiten gewidmet. Verzagen Sie nicht – es lohnt sich!

Wir fassen zunächst einige Eigenschaften der **reellen Zahlen**[1] zusammen. Wir können reelle Zahlen addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (wobei lediglich die Division durch 0 keinen Sinn macht und daher „verboten" ist). Von zwei verschiedenen reellen Zahlen ist stets eine die kleinere und die andere die größere, was wir durch die bekannten Symbole $<$ und $>$ ausdrücken[2]. Reelle Zahlen, die > 0 bzw. < 0 sind, nennen wir positiv bzw. negativ. Dank dieser Ordnungsstruktur können wir uns die reellen Zahlen auf der **Zahlengeraden** angeordnet vorstellen, wobei eine reelle Zahl kleiner (größer) als eine andere ist, wenn sie auf der

[1] Zum Begriff der reellen Zahlen und ihren wichtigsten Eigenschaften siehe die Skripten *Zahlenmengen*, *Rechengesetze für die Grundrechnungsarten* und *Die Ordnung der reellen Zahlen*.

[2] Dazu kommen die Symbole $\leq$ (kleiner oder gleich) und $\geq$ (größer oder gleich).

Zahlengeraden „links" („rechts") von dieser liegt. Der „Abstand" einer so dargestellten reellen Zahl von jenem Punkt auf der Zahlengeraden, der die Zahl 0 darstellt, ist ihr Absolutbetrag[3] (kurz: Betrag). Den Betrag einer reellen Zahl x schreiben wir in der Form $|x|$ an. Die Menge aller reellen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{R}$ bezeichnet.

Um den ersten Schritt in die Welt der komplexen Zahlen vorzubereiten, erinnern wir uns an einen weiteren Sachverhalt, den wir schon früh gelernt haben: Das Quadrat einer reellen Zahl ist größer oder gleich 0, also:

$$x^2 \geq 0 \qquad \text{für jedes } x \in \mathbb{R}. \tag{1.1}$$

Das bedeutet, dass es sehr einfache Gleichungen[4] gibt, die im Rahmen der reellen Zahlen keine Lösung besitzen, etwa die quadratische Gleichung[5]

$$x^2 = -1. \tag{1.2}$$

Es gibt keine reelle Zahl, deren Quadrat gleich -1 wäre. Die Lösungsmenge von (1.2), als Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ aufgefasst, ist leer. Das hat zur Folge, dass es keine reelle Zahl gibt, die man als „Quadratwurzel aus -1" bezeichnen könnte.

Nun haben Mathematiker schon vor langer Zeit bemerkt, dass es bei manchen Berechnungen sinnvoll ist, so zu tun, *als ob* man die Quadratwurzel aus negativen Zahlen ziehen könnte. Wir müssen hier auf konkrete Beispiele verzichten, da wir die dafür nötigen Vorkenntnisse noch nicht erarbeitet haben[6], nehmen aber den Grundgedanken ernst. In einer modernen Form ausgedrückt, lautet er: Erlauben wir uns einmal, die Existenz eines „Rechenobjektes" anzunehmen, dessen Quadrat gleich -1 ist. Um ihm einen Namen zu geben[7], nennen wir es j. Wir legen also fest, dass

$$j^2 = -1 \tag{1.3}$$

gelten soll. Ansonsten wollen wir mit j so rechnen, wie wir es für reelle Zahlen bzw. für Variable, die reelle Zahlen darstellen, gewohnt sind. Was können wir mit j anstellen? Wir können es zunächst in beliebiger Weise mit reellen Zahlen und mit sich selbst addieren und multiplizieren. So können wir beispielsweise

$$8 + 5j + 2j^2 \tag{1.4}$$

[3] Siehe das Skriptum *Absolutbetrag*.

[4] Über Gleichungen und die wichtigen Begriffe *Grundmenge*, *Lösung* und *Lösungsmenge* informiert das Skriptum *Was ist eine Gleichung?*.

[5] Für einen Einstieg in die komplexen Zahlen ist es wichtig, einiges über *quadratische Gleichungen*, wie sie im Rahmen der reellen Zahlen behandelt werden, zu wissen. Ziehen Sie dazu bei Bedarf das gleichnamige Skriptum zu Rate!

[6] Worum es dabei ging, sei nur kurz angedeutet: Bereits im 16. Jahrhundert wurde von itailienischen Mathematikern ein Verfahren zur Lösung von Gleichungen dritten Grades gefunden. Bei seiner Anwendung muss man so tun, als könnte man aus negativen Zahlen die Wurzel ziehen, aber am Schluss kann es passieren, dass sich diese Wurzeln wegheben und eine (ganz normale) reelle Zahl herauskommt, die die Gleichung löst.

[7] In der mathematischen Literatur wird es i genannt, für „imaginär". Weil das Symbol i aber in der Elektrotechnik für eine zeitlich variable Stromstärke reserviert ist, wird in technischen Bereichen meist j statt i geschrieben. Da das vorliegende Skriptum in einer Kooperation mit einer technischen Fachhochschule entstand, wird der Buchstabe j verwendet.

hinschreiben. Das lässt sich aber mit (1.3) und der Vereinbarung, dass mit j so wie mit einer reellen Zahl oder einer rellen Variable gerechnet werden kann, vereinfachen: j^2 können wir sogleich durch -1 ersetzen, sodass sich

$$8+5j+2j^2 = 8+5j+2\cdot(-1) = 8+5j-2 = 6+3j \tag{1.5}$$

ergibt. Interessant! Der quadratische Ausdruck (1.4) ist zu $6+3j$ zusammengeschrumpft. Wir können auch höhere Potenzen von j betrachten. So ist beispielsweise

$$j^3 = j^2\cdot j = (-1)\cdot j = -j \qquad \text{und} \qquad j^4 = j^2\cdot j^2 = (-1)\cdot(-1) = 1 \tag{1.6}$$

und damit etwa

$$6+2j+4j^2-7j^3+3j^4 = 6+2j-4+7j+3 = 5+9j. \tag{1.7}$$

(Rechnen Sie nach!) Derartige Kombinationen von j mit reellen Zahlen reduzieren sich jedes mal auf einen Ausdruck der Form

$$\text{reelle Zahl}_1 + j\,\text{reelle Zahl}_2 \tag{1.8}$$

oder, etwas formaler angeschrieben[8],

$$x + j\,y \qquad \text{mit } x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.9}$$

Einen solchen Ausdruck wollen wir eine **komplexe Zahl** nennen. Oft wird für komplexe Zahlen der Buchstabe z verwendet (so wie man für reelle Zahlen oft x schreibt), obwohl das natürlich nicht verpflichtend ist. Ist z eine komplexe Zahl, so gilt

$$z = x + j\,y \qquad \text{mit } x,y\in\mathbb{R}. \tag{1.10}$$

Die reelle Zahl x nennt man den **Realteil** von z, abgekürzt $\mathrm{Re}(z)$. Die reelle Zahl y nennt man den **Imaginärteil** von z, abgekürzt $\mathrm{Im}(z)$.

Beispiel: Ist $z = 4-7j$, so ist $\mathrm{Re}(z) = 4$ und $\mathrm{Im}(z) = -7$.

Es gibt verschiedene Arten, eine komplexe Zahl anzugeben. So stellen beispielsweise, wie wir soeben gesehen haben, $8+5j+2j^2$ und $6+3j$ die gleiche komplexe Zahl dar. Wird eine komplexe Zahl in der Form „Realteil $+\,j\,\cdot$ Imaginärteil“ (d.h. in der Form $x+j\,y$ für reelle Zahlen x und y) angegeben, so sprechen wir von der **Komponentendarstellung** (oder **kartesischen Darstellung**) dieser Zahl. Wenn aus dem Zusammenhang klar ist, dass mit x und y reelle Zahlen gemeint sind, so kann in Angaben wie (1.10) der Zusatz „mit $x,y\in\mathbb{R}$“ entfallen. Werden andere Symbole verwendet, wie etwa in $w = u + j\,v$, und ist nicht ganz klar, ob u und v reelle oder komplexe Zahlen sein sollen, so empfiehlt es sich, diesbezüglich ein bisschen akribisch zu sein (und beispielsweise „$w = u + j\,v$ für $u,v\in\mathbb{R}$“ zu scheiben, falls es so gemeint ist).

[8] Ob man $x+j\,y$ oder $x+y\,j$ schreibt, ist gleichgültig. Meist wird für *allgemeine* komplexe Zahlen die Schreibweise $x+j\,y$ vorgezogen, für *konkrete* komplexe Zahlen aber lieber (beispielsweise) $2+3j$ anstelle von $2+j\,3$ (weil man auch beim Rechnen mit Termen lieber $2+3x$ anstelle von $2+x\,3$ schreibt). Ausnahme: Statt $3-\sqrt{2}\,j$ schreibt man lieber $3-j\,\sqrt{2}$, aber auf die Schreibweise kommt es nicht an. Man kann auch Malpunkte machen und $x+j\cdot y$ oder $x+y\cdot j$ und $2+3\cdot j$ oder $2+j\cdot 3$ schreiben – ganz wie es einem beliebt.

Einige konkrete Beispiele für komplexe Zahlen sind:

(i) $2 + 3j$
(ii) $-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$
(iii) $3 + j\,\pi$
(iv) 1, denn 1 kann man als $1 + 0 \cdot j$ schreiben.
(v) -3, denn -3 kann man als $-3 + 0 \cdot j$ schreiben.
(vi) 0, denn 0 kann man als $0 + 0 \cdot j$ schreiben.
(vii) j, denn j kann man als $0 + 1 \cdot j$ schreiben.
(viii) $-j$, denn $-j$ kann man als $0 - 1 \cdot j$ schreiben.

Die Beispiele (iv) – (vi) zeigen, dass auch **reelle Zahlen als komplexe Zahlen aufgefasst werden können**. In diesem Sinn ist eine reelle Zahl eine komplexe Zahl, deren Imaginärteil gleich 0 ist.

Eine komplexe Zahl, deren Realteil gleich 0 ist, wird **imaginär** (**imaginäre Zahl**) genannt. Beispiele für imaginäre Zahlen sind j, $-j$, $3j$ und $-j\,\pi$.

Die Menge aller komplexen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{C}$ bezeichnet.

Wissen wir jetzt, was komplexe Zahlen sind? Ja und nein! Wir werden uns im nächsten Abschnit genauer ansehen, wie das Rechnen mit komplexen Zahlen funktioniert und ein gewisses Gefühl dafür aufbauen, worauf es beim Konzept der komplexen Zahlen ankommt. Aber immerhin wissen wir bereits, dass eine komplexe Zahl durch die Angabe **zweier reeller Zahlen** (eines Realteils und eines Imaginärteils) eindeutig festgelegt werden kann. So gesehen kann eine komplexe Zahl $z = x + j\,y$ als reelles Zahlenpaar (x, y) aufgefasst werden. Das ist immerhin schon ein bisschen konkreter, als von „abstrakten Rechenobjekten" zu sprechen. Wir werden diesen Aspekt später noch vertiefen. Wichtiger als die Frage „Was sind komplexe Zahlen?" ist aber die Frage „Was können wir mit komplexen Zahlen machen?", und dabei geht es vor allem um die Konsequenzen unserer Regel (1.3).

2 Grundrechnungsarten und komplexe Konjugation

Gemäß unserer Vereinbarung können wir mit j genauso rechnen wie mit einer reellen Zahl oder einer reellen Variable, aber wann immer in einer Rechung j^2 auftritt, können wir es durch -1 ersetzen. Das führt zunächst dazu, dass man komplexe Zahlen addieren und multiplizieren kann und dabei stets wieder komplexe Zahlen bekommt.

Die **Addition komplexer Zahlen** funktioniert gänzlich problemlos, fast langweilig. So ist beispielsweise die Summe der komplexen Zahlen $3 + 5\,j$ und $4 + 6\,j$ gleich

$$3 + 5\,j + 4 + 6\,j = 7 + 11\,j. \tag{2.1}$$

Wir können daher die allgemeine Regel formulieren: Die Summe zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + j\,y_1$ und $z_2 = x_2 + j\,y_2$ ist gegeben durch

$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + j\,(y_1 + y_2). \tag{2.2}$$

In Worten: Der Realteil einer Summe komplexer Zahlen ist gleich der Summe der Realteile der Summanden, und der Imaginärteil einer Summe komplexer Zahlen ist gleich der Summe der Imaginärteile der Summanden. Auch die **Subtraktion** komplexer Zahlen stellt kein Problem dar. Beispiel:

$$3 + 5\,j - (4 + 6\,j) = 3 + 5\,j - 4 - 6\,j = -1 - j. \tag{2.3}$$

(Achten Sie auf die Vorzeichen[9]!)

Nun zur **Multiplikation komplexer Zahlen**: Bilden wir etwa das Produkt der komplexen Zahlen $3{+}5\,j$ und $4{+}6\,j$, also $(3{+}5\,j)\,(4{+}6\,j)$, so können wir die Klammern ausmultiplizieren, wodurch ein j^2 auftritt, das aber sogleich durch -1 ersetzt wird:

$$\begin{aligned}(3 + 5\,j)(4 + 6\,j) &= 3 \cdot 4 + 3 \cdot 6\,j + 5 \cdot 4\,j + 5 \cdot 6\,j^2 = 12 + 18j + 20j + 30j^2 = \\ &= 12 + 18j + 20j - 30 = -18 + 38j.\end{aligned} \tag{2.4}$$

(Rechnen Sie nach!) Das Produkt ist wieder eine komplexe Zahl. Um die allgemeine Regel für die Multiplikation komplexer Zahlen aufzustellen, exerzieren wir das noch einmal durch, aber nun ganz allgemein mit $z_1 = x_1 + j\,y_1$ und $z_2 = x_2 + j\,y_2$:

$$\begin{aligned}z_1 z_2 &= (x_1 + j\,y_1)\,(x_2 + j\,y_2) = x_1 x_2 + j\,x_1 y_2 + j\,y_1 x_2 + j^2\,y_1 y_2 = \\ &= x_1 x_2 - y_1 y_2 + j\,(x_1 y_2 + y_1 x_2).\end{aligned} \tag{2.5}$$

Die allgemeine Regel lautet also

$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + j\,(x_1 y_2 + y_1 x_2). \tag{2.6}$$

Der Realteil von $z_1 z_2$ ist gleich $x_1 x_2 - y_1 y_2$, der Imaginärteil von $z_1 z_2$ ist $x_1 y_2 + y_1 x_2$. Damit ist ein für allemal festgelegt, was das Produkt zweier komplexer Zahlen ist.

Theoretisch könnten wir jetzt unsere bisherige Strategie „mit j wollen wir rechnen wie mit einer reellen Zahl oder einer reellen Variable, aber wann immer j^2 auftritt, wird es durch -1 ersetzt" vergessen und statt dessen die Regeln (2.2) für die Addition und (2.6) für die Multiplikation komplexer Zahlen vereinbaren. Man sagt auch: Durch diese Regeln wird die Menge $\mathbb{C}$ mit einer Addition und einer Multiplikation „ausgestattet".

Die erste einigermaßen spannende Frage lautet nun: Können wir mit komplexen Zahlen auch **Divisionen** ausführen? Versuchen wir es:

$$\frac{1 + 4\,j}{2 + 3\,j} = \,? \tag{2.7}$$

Macht ein solcher Quotient einen Sinn? Und, falls ja, ist er wieder gleich einer komplexen Zahl, also von der Form $x + j\,y$ für $x, y \in \mathbb{R}$? Dass nun unser j im Nenner eines Bruchs steht, wirft die Frage auf, wie wir es dort loswerden können. Das bewerkstelligt ein kleiner Trick, den Sie

[9] Unsere Vereinbarung, mit j so wie mit einer reellen Zahl oder einer reellen Variable zu rechnen, betrifft natürlich auch den Umgang mit Klammern, d.h. das Ausmultiplizieren und das Herausheben. Siehe dazu das Skriptum *Grundsätzliches zu Termen und Variablen*.

sich gut merken sollten. Zunächst erweitern wir den Bruch, indem wir Zähler und Nenner mit $2 - 3\,j$ multiplizieren[10]:

$$\frac{1+4\,j}{2+3\,j} = \frac{(1+4\,j)\,(2-3\,j)}{(2+3\,j)\,(2-3\,j)}\,. \tag{2.8}$$

Nun berechnen wir Zähler und Nenner separat, in zwei kleinen Nebenrechnungen:

$$\text{Zähler} = (1+4\,j)\,(2-3\,j) = 2 - 3j + 8j - 12j^2 = 14 + 5j \tag{2.9}$$

$$\text{Nenner} = (2+3\,j)\,(2-3\,j) = 4 - 6j + 6j - 9j^2 = 4 + 9 = 13 \tag{2.10}$$

Sehen Sie, was passiert ist? Das j ist aus dem Nenner verschwunden! Daher gilt

$$\frac{1+4\,j}{2+3\,j} = \frac{14+5j}{13} = \frac{14}{13} + \frac{5}{13}\,j\,, \tag{2.11}$$

womit die Division ausgeführt ist! Das Ergebnis ist eine komplexe Zahl – ihr Realteil ist $\frac{14}{13}$, ihr Imaginärteil ist $\frac{5}{13}$. Dieses Verfahren funktioniert immer, sofern nicht versucht wird, durch 0 zu dividieren. In der Praxis benötigt man keine Nebenrechnungen wie (2.9)−(2.10), sondern zieht die Sache in einem durch. Hier anhand eines weiteren Beispiels:

$$\frac{3+2\,j}{1-j} = \frac{(3+2\,j)\,(1+j)}{(1-j)\,(1+j)} = \frac{3+3j+2j-2}{1+j-j+1} = \frac{1+5j}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\,j, \tag{2.12}$$

wobei auf den letzten Umformungsschritt auch verzichtet werden kann, da Real- und Imaginärteil auch aus der Form

$$\frac{1+5j}{2} \tag{2.13}$$

mit einem Blick erkannt werden. Der Trick bei der Division besteht also darin, den Bruch mit jener komplexen Zahl zu erweitern, die aus dem Nenner entsteht, indem das Vorzeichen seines Imaginärteils umgedreht wird. Wird der Nenner in der Form $x + j\,y$ geschrieben (mit $x, y \in \mathbb{R}$), so wird der Bruch mit $x - j\,y$ erweitert.

Dieser Sachverhalt ist so wichtig, dass $x - j\,y$ einen eigenen Namen bekommt: Wir nennen $x - j\,y$ die zu $x + j\,y$ **komplex Konjugierte** (oder die zu $x + j\,y$ **komplex konjugierte Zahl** oder einfach die **komplex Konjugierte von** $x + j\,y$) und schreiben sie mit einem Überstrich an:

$$\overline{x + j\,y} = x - j\,y. \tag{2.14}$$

Das können wir auch so ausdrücken: Ist $z = x + j\,y$, so ist

$$\overline{z} = x - j\,y. \tag{2.15}$$

Beispiel 1: Mit $z = 3 - 5j$ ist $\overline{z} = 3 + 5j$.
Beispiel 2: $\overline{3 + \pi\,j} = 3 - \pi\,j$.

[10] Zur Bruchrechnung mit reellen Zahlen und reellen Variablen siehe das Skriptum *Bruchterme*.

In manchen Lehrbüchern wird statt des Überstrichs ein Sternchen geschrieben. Dann heißt es $(x + j\,y)^*$ statt $\overline{x + j\,y}$ und z^* statt $\overline{z}$.

Der Trick mit dem Erweitern funktioniert deshalb, weil das Produkt $z\,\overline{z}$ stets reell ist, und weil für jedes $z \neq 0$ auch $z\,\overline{z} \neq 0$ gilt. Sehen wir uns das ganz allgemein an: Mit $z = x + j\,y$ berechnen wir

$$z\,\overline{z} = (x + j\,y)\,(x - j\,y) = x^2 - j\,xy + j\,yx - j^2 y = x^2 + y^2. \tag{2.16}$$

Die Umformung $(x + j\,y)\,(x - j\,y) = x^2 + y^2$ ergibt sich auch als Anwendung der binomischen Formel

$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2, \tag{2.17}$$

die für komplexe Zahlen ebenso gilt wie für reelle, mit $a = x$ und $b = j\,y$. Klarerweise ist $x^2 + y^2$ für reelle Zahlen x und y stets reell, und $x^2 + y^2$ ist nur dann gleich 0, wenn $x = y = 0$ ist. Daher können wir durch jede komplexe Zahl dividieren, außer durch 0.

Mit Hilfe des komplex Konjugierens lautet die Regel für das Dividieren komplexer Zahlen in kompakter Form

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\,\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}\,. \tag{2.18}$$

Sehen Sie sich (2.8) und (2.12) noch einmal an: Erkennen Sie, dass die Berechnungen in beiden Fällen nach dem Strickmuster (2.18) beginnen? Wir können auch ganz leicht eine explizite Formel für die Division von $z_1 = x_1 + j\,y_1$ durch $z_2 = x_2 + j\,y_2$ aufstellen:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &\overset{(2.18)}{=} \frac{(x_1 + j\,y_1)\,(x_2 - j\,y_2)}{(x_2 + j\,y_2)\,(x_2 - j\,y_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + j\,(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{{x_2}^2 + {y_2}^2} \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2} + j\,\frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{{x_2}^2 + {y_2}^2}\,. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Auch diese allgemeine Form zeigt, dass die Frage, ob komplexe Zahlen durcheinander dividiert werden können, mit einem klaren Ja beantwortet werden kann. Lediglich durch 0 kann nicht dividiert werden.

Damit können mit den komplexen Zahlen die gleichen Grundrechnungsarten wie mit den reellen Zahlen ausgeführt werden: Addieren, subtrahieren, multiplizieren und dividieren (außer durch 0). Dabei gelten die gleichen Regeln für den Umgang mit Klammern und Brüchen wie für die reellen Zahlen, beispielsweise

$$w(z_1 + z_2) = wz_1 + wz_2 \qquad \text{für beliebige } z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \tag{2.20}$$

und

$$\frac{z_1}{w} + \frac{z_2}{w} = \frac{z_1 + z_2}{w} \qquad \text{für beliebige } z_1, z_2, w \in \mathbb{C} \text{ mit } w \neq 0. \tag{2.21}$$

In der Fachsprache sagt man, dass die komplexen Zahlen einen „Körper“ bilden[11], ebenso wie die reellen oder die rationalen Zahlen. Da die reellen Zahlen in der Menge der komplexen

[11] Ein *Körper* ist in der mathematischen Sprache eine Menge, in der man die Grundrechnungsarten nach den üblichen Regeln ausführen kann und dabei stets wieder Elemente dieser Menge bekommt. Die Mengen der rationalen, der reellen und der komplexen Zahlen sind Körper. Die Menge der ganzen Zahlen aber ist *kein* Körper, da die Division ganzer Zahlen auf nicht-ganze Zahlen führt.

Zahlen enthalten sind, spricht man auch von einer „Körpererweiterung“: Die Menge $\mathbb{C}$ entsteht aus der Menge $\mathbb{R}$ durch eine „Erweiterung“, indem das Rechenobjekt j hinzugenommen wird und in der Folge auch alle Kombinationen von j mit reellen Zahlen.

3 Ist j die „Wurzel aus -1“?

Neben den Regeln für den Umgang mit Klammern und Brüchen teilen die komplexen Zahlen eine weitere wichtige Eigenschaft mit den reellen: Ist ein Produkt zweier komplexer Zahlen gleich 0, so ist (zumindest) einer der beiden Faktoren gleich 0:

$$\begin{gathered}\text{Gilt } z_1 z_2 = 0 \text{ für ein } z_1 \in \mathbb{C} \text{ und ein } z_2 \in \mathbb{C},\\ \text{so ist entweder } z_1 = 0 \text{ oder } z_2 = 0 \text{ (oder beides).}\end{gathered} \tag{3.1}$$

In der Fachsprache heißt diese Eigenschaft „Nullteilerfreiheit“. Sie erlaubt es uns sofort, eine Frage zu beantworten, die Ihnen vielleicht bereits auf den Lippen liegt: Kann man j angesichts der Eigenschaft (1.3) als „Wurzel aus -1“ bezeichnen und dafür $\sqrt{-1}$ schreiben? Eine „Wurzel aus -1“ muss die Gleichung

$$z^2 = -1 \tag{3.2}$$

erfüllen. Wir wissen natürlich, dass $j^2 = -1$ ist (so haben wir ja j eingeführt), aber um die grundsätzliche Möglichkeit nicht auszuschließen, dass es auch andere komplexe Zahlen geben könnte, deren Quadrat gleich -1 ist, müssen wir nun eine *Gleichung* betrachten, nämlich (3.2), als Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$ aufgefasst. Ihre Lösungsmenge besteht aus allen komplexen Zahlen z, für die $z^2 = -1$ gilt. Um alle diese komplexen Zahlen zu finden, bringen wir (3.2) zunächst durch Addition von 1 auf beiden Seiten auf die Form

$$z^2 + 1 = 0. \tag{3.3}$$

Nun wieder ein kleiner Trick: Wir schreiben $z^2 + 1$ in der Form $z^2 - j^2$ und verwenden die binomische Formel (2.17) mit $a = z$ und $b = j$ (nun von rechts nach links gelesen), formen also um:

$$z^2 + 1 = z^2 - j^2 = (z - j)\,(z + j). \tag{3.4}$$

Daher können wir die Gleichung (3.3) auch in der Form

$$(z - j)\,(z + j) = 0 \tag{3.5}$$

schreiben. Mit der Eigenschaft (3.1) folgt, dass entweder $z - j = 0$ oder $z + j = 0$ gelten muss. Daraus folgt, dass die Gleichung (3.3) – und damit auch die dazu äquivalente Gleichung (3.2) – zwei Lösungen besitzt: $z = j$ und $z = -j$. Die Bezeichnung „Wurzel aus -1“ müsste sich j also mit $-j$ teilen! An dieser Stelle ergibt sich nun doch ein wichtiger Unterschied zwischen den reellen und den komplexen Zahlen:

- Ist a eine positive reelle Zahl, so besitzt die Gleichung $x^2 = a$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ zwei Lösungen, eine positive und eine negative. Die positive Lösung bezeichnen wir mit $\sqrt{a}$, die negative Lösung ist dann gleich $-\sqrt{a}$. Unter den zwei Lösungen der Gleichung $x^2 = a$ wird also eine (die positive) ausgezeichnet und als „Wurzel aus a“ bezeichnet.

- Ist a eine negative reelle Zahl, so besitzt die Gleichung $x^2 = a$ über der Grundmenge $\mathbb{R}$ gar keine Lösung. Ein Beispiel dafür ist die Gleichung (3.2). Über der Grundmenge $\mathbb{C}$ besitzt sie, wie wir soeben in Erfahrung gebracht haben, zwei Lösungen, nämlich $-j$ und j. Diese zwei Lösungen sind in gewisser Weise „gleichberechtigt". Wir werden später noch sehen[12], dass es im Rahmen der komplexen Zahlen keine Handhabe gibt, eine von beiden zu bevorzugen. Daraus ergibt sich:
  - Das Symbol $\sqrt{-1}$ sollte vermieden werden, da es mit gleichem Recht j und $-j$ bezeichnen könnte.
  - Konsequenterweise könnte man auch daran denken, im Rahmen der komplexen Zahlen den Begriff „Wurzel" ebenfalls zu vermeiden. Aus historischen Gründen hat sich aber, wenn es um komplexe Zahlen geht, die Sprechweise eingebürgert, dass -1 *zwei Wurzeln* besitzt, nämlich j und $-j$. Das Wort „Wurzel" ist in diesem Zusammenhang eher als „Lösung" zu verstehen, nämlich als Lösung der Gleichung $z^2 = -1$.

Also bitte *nicht* $j = \sqrt{-1}$ sagen und schreiben! Die Aussage, dass j „eine der beiden Wurzeln aus -1" ist, entspricht dem Sprachgebrauch, wenn es um komplexe Zahlen geht, sollte uns aber nicht dazu verleiten, den reellen Wurzelbegriff umzudeuten: Nach wie vor bezeichnet das Symbol $\sqrt{9}$ die Zahl 3 und *nicht* gleichzeitig auch die Zahl -3.

Sehen wir uns kurz an, ob auch andere negative Zahlen komplexe Wurzeln besitzen: Ist a eine positive reelle Zahl, so können wir mit der Gleichung

$$z^2 = -a \tag{3.6}$$

genauso verfahren wie mit (3.2):

$$z^2 + a = z^2 - j^2 a = z^2 - \left(j\,\sqrt{a}\right)^2 = \left(z - j\,\sqrt{a}\right)\left(z + j\,\sqrt{a}\right). \tag{3.7}$$

Wieder muss einer der beiden Faktoren gleich 0 sein, woraus wir schließen: Die Gleichung (3.6) besitzt zwei Lösungen, nämlich $z = j\,\sqrt{a}$ und $z = -j\,\sqrt{a}$, was wir einheitlich in der Form $z_{1,2} = \pm j\,\sqrt{a}$ schreiben können. Jede negative Zahl besitzt in $\mathbb{C}$ zwei Wurzeln.

4 Quadratische Gleichungen über $\mathbb{C}$

Die oben betrachteten Gleichungen (3.2) und (3.6) sind quadratische Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{C}$. Können wir auch ganz *allgemeine* quadratische Gleichungen[13] über der Grundmenge $\mathbb{C}$ betrachten? Ja, warum nicht? Eine quadratische Gleichung für eine komplexe Variable z kann immer in der Form $az^2 + bz + c = 0$ geschrieben werden, wobei a $(\neq 0)$, b und c vorgegebene komplexe Zahlen sind. Durch Division beider Seiten durch a können wir sie in die Normalform

$$z^2 + pz + q = 0 \tag{4.1}$$

[12] Im Nachfolgeskriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*.

[13] Für quadratische Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ siehe das Skriptum *Quadratische Gleichungen*.

bringen, wobei nun p und q vorgegebene komplexe Zahlen sind. Wir wollen uns zunächst auf den Fall beschränken, dass die Koeffizienten p und q reell sind. Dann kann (4.1) wahlweise als Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{R}$ oder als Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$ aufgefasst werden. Nun erinnern wir uns daran, dass es für quadratische Gleichungen über der Grundmenge $\mathbb{R}$ eine handliche Lösungsformel gibt[14]. Die „kleine Lösungsformel" für eine quadratische Gleichung der Form (4.1), aufgefasst als Gleichung über $\mathbb{R}$, lautet

$$z_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\,. \tag{4.2}$$

Die Zahl unter dem Wurzelsymbol, die so genannte *Diskriminante*, bestimmt, welcher Lösungsfall eintritt:

- Ist sie positiv, so besitzt die Gleichung genau zwei reelle Lösungen z_1 und z_2.
- Ist sie gleich 0, so besitzt die Gleichung genau eine reelle Lösung. (In diesem Fall wird die Schreibweise $z_{1,2}$ natürlich nicht mehr zur Angabe der Lösung verwendet. Die einzige Lösung ist dann $z = -\frac{p}{2}$.)
- Ist sie negativ, so besitzt die Gleichung keine reelle Lösung.

Können wir (4.2) auch verwenden, wenn (4.1) als Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$ betrachtet wird? Um das zu untersuchen, wiederholen wir die Schritte, die im Reellen auf die Lösungsformel geführt haben[15]: Da wurde zunächst der Term $z^2 + pz$ auf ein vollständiges Quadrat ergänzt – eine Vorgangsweise, die sich auch im Komplexen anwenden lässt, da nur Rechenregeln hinsichtlich des Umgangs mit Klammern benutzt werden:

$$z^2 + pz + q = \underbrace{z^2 + pz + \frac{p^2}{4}}_{\left(z+\frac{p}{2}\right)^2} - \frac{p^2}{4} + q = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q. \tag{4.3}$$

Daher können wir (4.1) in der Form

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} - q \tag{4.4}$$

schreiben. Die Diskriminante ist nun die Zahl auf der rechten Seite, $\frac{p^2}{4} - q$. Bis hierher ist alles verlaufen wie im Reellen. Werden nun auch komplexe Zahlen als Lösungen zugelassen, so ergeben sich folgende Lösungsfälle:

- Ist die Diskriminante positiv, so führen wir die Abkürzung $D = \frac{p^2}{4} - q$ ein, womit (4.4) die Form $(z + \frac{p}{2})^2 = D$ annimmt, was wir auch als $(z + \frac{p}{2})^2 - D = 0$ schreiben können. Unter Verwendung der binomischen Formel (2.17) für $a = z + \frac{p}{2}$ und $b = \sqrt{D}$ formen wir um

$$\left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - D = \left(z + \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{D}\right)^2 = \left(z + \frac{p}{2} + \sqrt{D}\right)\left(z + \frac{p}{2} - \sqrt{D}\right), \tag{4.5}$$

[14] Tatsächlich wurden im Skriptum *Quadratische Gleichungen zwei* Lösungenformeln besprochen, die „kleine" und die „große". Alles, was im Folgenden mit der „kleinen" Lösungenformel gemacht wird, funktioniert ganz analog auch mit der „großen".

[15] Und zwar im Skriptum *Quadratische Gleichungen*.

womit unsere Gleichung die Form $(z+\frac{p}{2}+\sqrt{D})\,(z+\frac{p}{2}-\sqrt{D})=0$ annimmt. Wegen (3.1) muss einer der beiden Faktoren gleich 0 sein, sodass sich genau zwei reelle Lösungen ergeben, nämlich $z=-\frac{p}{2}-\sqrt{D}$ und $z=-\frac{p}{2}+\sqrt{D}$. Schreiben wir sie gemeinsam in der Form $z_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm\sqrt{D}$, so erhalten wir genau die beiden Lösungen, die die kleine Lösungsformel (4.2) für diesen Fall angibt.

- Ist die Diskriminante gleich 0, also $\frac{p^2}{4}-q=0$, so reduziert sich (4.4) auf $(z+\frac{p}{2})^2=0$. Mit (3.1) folgt, dass dann $z+\frac{p}{2}=0$ sein muss. In diesem Fall gibt es genau eine reelle Lösung, nämlich $z=-\frac{p}{2}$.
- Ist die Diskriminante negativ, so schreiben wir sie in der Form $D=-B$ mit $B=-\frac{p^2}{4}+q>0$. Gleichung (4.4) nimmt dann die Form $(z+\frac{p}{2})^2=-B$ an, was wir auch als $(z+\frac{p}{2})^2+B=0$ schreiben können. Nun wieder der Trick:

$$\left(z+\frac{p}{2}\right)^2+B=\left(z+\frac{p}{2}\right)^2-\left(j\sqrt{B}\right)^2=\left(z+\frac{p}{2}+j\sqrt{B}\right)\left(z+\frac{p}{2}-j\sqrt{B}\right), \tag{4.6}$$

wobei im letzten Schritt die binomische Formel (2.17) für $a=z+\frac{p}{2}$ und $b=j\sqrt{B}$ angewandt wurde. Wegen (3.1) ist dieses Produkt nur dann gleich 0, wenn einer der beiden Faktoren gleich 0 ist, womit sich genau zwei komplexe Lösungen ergeben, nämlich $z=-\frac{p}{2}-j\sqrt{B}$ und $z=-\frac{p}{2}+j\sqrt{B}$. Sie sind zueinander komplex konjugiert und können gemeinsam in der Form

$$z_{1,2}=-\frac{p}{2}\pm j\sqrt{-\frac{p^2}{4}+q}. \tag{4.7}$$

geschrieben werden. Wir erhalten sie aus der kleinen Lösungsformel (4.2), indem wir das Vorzeichen der (negativen) Zahl unter dem Wurzelsymbol umdrehen (sodass unter dem Wurzelsymbol eine positive Zahl zu stehen kommt) und ein j „herausziehen“. Mit anderen Worten: Wir schreiben den Wurzelausdruck gemäß

$$\pm\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}=\pm j\sqrt{-\frac{p^2}{4}+q} \tag{4.8}$$

um. Bei einer solchen Umformung verstoßen wir genau genommen (nur ganz kurz) gegen unsere Beschränkung, unter das Wurzelsymbol keine negative Zahl zu schreiben, aber wegen des Doppelvorzeichens sind ohnehin *beide* Wurzeln gemeint, und am Ende stehen die Lösungen in richtiger Form da. Die gleiche Methode (Vorzeichen unter dem Wurzelsymbol umdrehen und ein j herausziehen) kann auch mit der „großen Lösungsformel“ angewandt werden, falls Ihnen diese lieber ist.

Was haben wir daraus gelernt? Über der Grundmenge $\mathbb{C}$ besitzt *jede* quadratische Gleichung mit reellen Koeffizienten zumindest eine Lösung. Ist die Diskriminante ungleich 0, so gibt es stets zwei Lösungen (die, je nach dem Vorzeichen der Diskriminante, auch reell sein können). Dass es quadratische Gleichungen mit reellen Koeffizienten und leerer Lösungsmenge gibt, gehört der Vergangenheit an, sofern komplexe Lösungen zugelassen sind.

Probieren wir das gleich anhand des Beispiels

$$z^2-6z+13=0 \tag{4.9}$$

aus. Wir verwenden die kleine Lösungsformel mit $p = -6$ und $q = 13$:

$$z_{1,2} = 3 \pm \sqrt{9-13} = 3 \pm \sqrt{-4} = 3 \pm j\,\sqrt{4} = 3 \pm 2j. \tag{4.10}$$

Damit sind die Lösungen gefunden. Ein zweites Beispiel, bei dem in den Lösungen nicht so „schöne" Zahlen auftreten, ist die Gleichung

$$z^2 - 5z + 13 = 0. \tag{4.11}$$

Die kleine Lösungsformel mit $p = -5$ und $q = 13$ ergibt

$$z_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 13} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-\frac{27}{4}} = \frac{5}{2} \pm j\,\sqrt{\frac{27}{4}} = \frac{5}{2} \pm j\,\frac{3\sqrt{3}}{2}\,, \tag{4.12}$$

was wahlweise auch in der Form

$$z_{1,2} = \frac{5 \pm 3j\,\sqrt{3}}{2} \tag{4.13}$$

geschrieben werden kann. Damit ist die Gleichung über der Grundmenge $\mathbb{C}$ gelöst.

Wir listen nun einige weitere Sachverhalte im Zusammenhang mit Gleichungen über $\mathbb{C}$ auf, ohne diese im Detail zu diskutieren:

- Quadratische Gleichungen mit *komplexen* Koeffizienten, also Gleichungen der Form (4.1), wobei p und q nun vorgegebene komplexe Zahlen sind, besitzen analoge Lösungsfälle: Es gibt stets entweder eine oder zwei Lösungen. Im Rahmen der komplexen Zahlen besitzt *jede* quadratische Gleichung zumindest eine Lösung. Die für diesen Fall zuständige Lösungsformel ist im Grund genommen wieder (4.2), allerdings ist die Diskriminante nun komplex, was bedeutet, dass man aus einer gegebenen komplexen Zahl die Wurzeln (Mehrzahl!) ziehen muss. Wir werden später[16] eine einfache Methode kennen lernen, das zu bewerkstelligen.
- Das Gleiche gilt auch für Gleichungen höheren Grades: *Jede* Gleichung der Form $f(z) = 0$, wobei f ein beliebiges Polynom[17] vom Grad ≥ 1 mit komplexen Koeffizienten ist, besitzt zumindest eine komplexe Lösung[18]. Diese auf Carl Friedrich Gauß zurückgehende Erkenntnis wird **Fundamentalsatz der Algebra** genannt. So betrachtet lassen sich die komplexen Zahlen als jene Erweiterung[19] der reellen Zahlen verstehen, in der polynomische Gleichungen vom Grad ≥ 1 stets Lösungen besitzen. In diesem Sinn bezeichnet man $\mathbb{C}$ auch als „algebraisch abgeschlossen".

[16] Im Nachfolgeskriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*.

[17] Unter einem komplexen Polynom vom Grad $n \geq 1$ verstehen wir hier einen Term der Form $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$ in einer komplexen Variablen z, mit vorgegebenen komplexen Koeffizienten $a_n, \ldots, a_0$, wobei $a_n \neq 0$ ist. Für reelle Polynome vom Grad 2 siehe das Skriptum *Quadratische Funktionen und ihre Graphen*. Jedes reelle Polynom kann als komplexes Polynom aufgefasst werden, indem die Variable als komplexe Variable angesehen wird.

[18] Beachten Sie, das bei diesen Formulierungen – „komplexe Koeffizienten", „komplexe Lösung" – der Begriff „komplex" auch reelle Koeffizienten bzw. Lösungen mit einschließt, da ja jede reelle Zahl auch eine komplexe Zahl ist!

[19] Zahlenbereichserweiterungen kommen in der Mathematik oft vor: Beginnt man mit den natürlichen Zahlen, so kann man (innerhalb dieser Menge) nicht alle Subtraktionen ausführen. So landet man bei den ganzen Zahlen als Erweiterung der natürlichen. Innerhalb der Menge der ganzen Zahlen kann man nicht beliebig dividieren,

- Jedes komplexe Polynom vom Grad ≥ 1 kann in **Linearfaktoren** zerlegt („faktorisiert") werden. Für Polynome vom Grad 2 (quadratische Polynome) bedeutet das, dass $az^2 + bz + c$ stets in der Form
$$a(z - z_1)\,(z - z_2) \tag{4.14}$$
geschrieben werden kann, wobei z_1 und z_2 die Lösungen der quadratischen Gleichung $az^2 + bz + c = 0$ sind. Die Linearfaktoren sind $z - z_1$ und $z - z_2$. (Besitzt die Gleichung nur eine einzige Lösung z_0, so lautet die Zerlegung in Linearfaktoren $a(z - z_0)^2$.) Oder, um ein Beispiel höheren Grades anzuführen:
$$z^3 - 1 = (z-1)\,(z^2 + z + 1) = (z-1)\left(-\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}\right). \tag{4.15}$$
(Rechnen Sie nach, indem Sie von der rechten Seite ausgehen und die Klammern ausmultiplizieren!) Die hier auftretenden komplexen Zahlen $-\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$ sind die Lösungen der Gleichung $z^2 + z + 1 = 0$. Aus (4.15) folgt übrigens sofort, dass die Gleichung $z^3 - 1 = 0$ (also $z^3 = 1$) über $\mathbb{C}$ drei Lösungen besitzt, nämlich $z_1 = 1$ und $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm j\frac{\sqrt{3}}{2}$. Man nennt diese drei Zahlen die „dritten Einheitswurzeln", also die „dritten Wurzeln aus 1", da sie genau jene drei komplexen Zahlen sind, deren dritte Potenz gleich 1 ist.

5 Die komplexe Zahlenebene

Bisher haben wir mit komplexen Zahlen *gerechnet*. Die komplexen Zahlen kann man aber auch unter geometrischen Gesichtspunkten betrachten.

Wie wir bereits wissen, wird eine komplexe Zahl $z = x + j\,y$ durch die Angabe zweier reeller Zahlen, eines Realteils x und eines Imaginärteils y, eindeutig bestimmmt. Umgekehrt besitzt jede komplexe Zahl einen Realteil und einen Imaginärteil und bestimmt daher in eindeutiger Weise zwei reelle Zahlen, ihren Realteil und ihren Imaginäteil. Das bedeutet, dass in einer komplexen Zahl genau die gleiche Information steckt wie in einem reellen Zahlenpaar, also einer Liste aus zwei Zahlen x und y. So gesehen können wir identifizieren
$$z = x + j\,y \qquad \longleftrightarrow \qquad (x, y) \qquad \longleftrightarrow \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{5.16}$$
wobei es gleichgültig ist, ob wir die beiden Zahlen nebeneinander oder untereinander schreiben. Die Menge aller reellen Zahlenpaare wird mit dem Symbol $\mathbb{R}^2$ (ausgesprochen „$\mathbb{R}$ zwei") bezeichnet[20]. Aufgrund der Identifizierung (5.16) kann die Menge $\mathbb{C}$ auch als die Menge $\mathbb{R}^2$ angesehen werden. Wozu das? Nun, die Menge $\mathbb{R}^2$ hat die sympathische Eigenschaft, dass

sodass man sie zu den rationalen Zahlen erweitert. Die Menge der rationalen Zahlen besitzt aber „Lücken". So gibt es etwa keine rationale Zahl, deren Quadrat gleich 2 wäre, obwohl man durch quadrieren rationaler Zahlen beliebig nahe an 2 herankommt. Werden die Lücken „aufgefüllt", so landet man bei den reellen Zahlen. Innerhalb der Menge der reellen Zahlen können negative Zahlen aber nicht als Quadrat geschrieben werden – was uns zu unserem Rechenobjekt j mit der Eigenschaft (1.3) geführt hat. Mit den komplexen Zahlen hat diese Folge von Erweiterungen einen gewissen Abschluss gefunden.

[20] Siehe dazu das Skriptum *Zahlenpaare und Zahlentripel*.

wir sie uns als **Zeichenebene** vorstellen können. Jedem reellen Zahlenpaar (x, y) entspricht jener Punkt der Zeichenebene, dessen erste Koordinate x und dessen zweite Koordinate y ist. Aufgrund dieser Identifizierung von Zahlenpaaren mit Punkten können wir uns **komplexe Zahlen als Punkte** der Zeichenebene vorstellen und ihre Lage relativ zu einem rechtwinkeligen Koordinatensystem auf einem Blatt Papier einzeichnen.

In ihrer Eigenschaft als Visualisierung der Menge $\mathbb{C}$ nennen wir die Zeichenebene auch die **komplexe Zahlenebene**, kurz **komplexe Ebene**, oder die **Gaußsche Zahlenebene**. Die erste Koordinatenachse heißt **reelle Achse**, die zweite Koordinatenachse heißt **imaginäre Achse**.

Sehen wir uns anhand von Abbildung 1 ein paar Dinge an, die auf der komplexe Ebene leben:

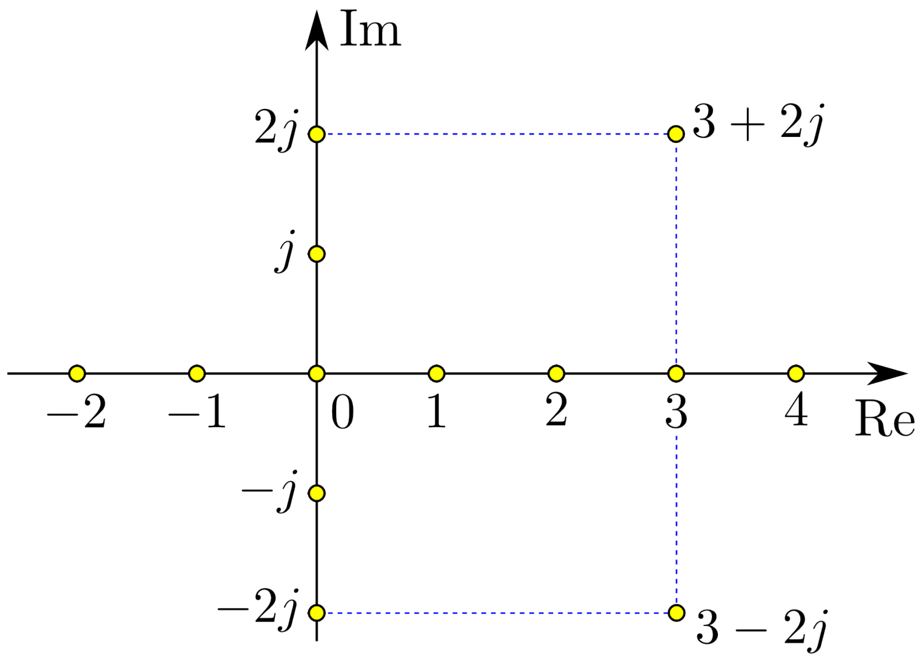


Abbildung 1: Die komplexe Zahlenebene: Komplexe Zahlen können gemäß (5.16) mit Punkten in der Zeichenebene identifiziert werden. Die reelle Achse, mit Re bezeichnet, stellt die Menge der reellen Zahlen dar. So gesehen kann die Menge der komplexen Zahlen als eine Erweiterung der (reellen) Zahlengeraden zu einer Ebene aufgefasst werden. Die komplexen Zahlen -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, $-2j$, $-j$, j, $2j$, $3+2j$ und $3-2j$ sind als gelbe Kreise dargestellt.

- Die Punkte der reellen Achse stellen jene komplexen Zahlen dar, deren Imaginärteil gleich 0 ist. Das sind genau die reellen Zahlen. In diesem Sinn **kann die reelle Achse mit der Zahlengeraden identifiziert werden**. Die reellen Zahlen in der komplexen Zahlenebene entsprechen also genau den Punkten $(x, 0)$ mit $x \in \mathbb{R}$. So gesehen bekommt das Wort von der „Erweiterung" der reellen Zahlen durch die komplexen ein besonderes geometrisches Flair: Die Zahlengerade wird zur komplexen Zahlenebene erweitert.
- Die Punkte der imaginären Achse stellen jene komplexen Zahlen dar, deren Realteil gleich 0 ist. Das sind genau die imaginären Zahlen. Die imaginären Zahlen in der komplexen Zahlenebene entsprechen also genau den Punkten $(0, y)$ mit $y \in \mathbb{R}$.

- Die Zahl 0 (die einzige komplexe Zahl, die sowohl reell als auch imaginär ist) wird durch den Ursprung $(0, 0)$ dargestellt.
- Vier komplexe Zahlen sind besonders wichtig: Die Zahl 1 entspricht dem Punkt $(1, 0)$. Die Zahl -1 entspricht dem Punkt $(-1, 0)$. Die Zahl j entspricht dem Punkt $(0, 1)$. Die Zahl $-j$ entspricht dem Punkt $(0, -1)$.
- Die komplexe Zahl $3 + 2\,j$ wird durch den Punkt $(3, 2)$ dargestellt, die komplexe Zahl $3 - 2\,j$ durch den Punkt $(3, -2)$.

In Abbildung 1 sind die komplexen Zahlen -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, $-2j$, $-j$, j, $2j$, $3 + 2j$ und $3 - 2j$ als gelbe Kreise dargestellt.

Manchmal ist es bequemer, komplexe Zahlen nicht durch Punkte darzustellen, sondern durch **Pfeile** (auch **Zeiger** genannt). Dabei handelt es sich um das gleiche Konzept wie jenes des (zweidimensionalen) **Vektors**. Eine komplexen Zahl $x + j\,y$ wird entweder durch den Pfeil vom Ursprung $(0, 0)$ zum Punkt (x, y) repräsentiert (das entspricht dem Konzept des „Ortsvektors“), wie in Abbildung 2 illustriert, oder durch eine beliebig parallelverschobene Version dieses Pfeils. Wir identifizieren komplexe Zahlen, Punkte und Pfeile so sehr miteinander, dass wir oft sprachlich keinen Unterschied zwischen ihnen machen und in Skizzen sowohl Punkte als auch Pfeile mit den Namen komplexer Zahlen beschriften.

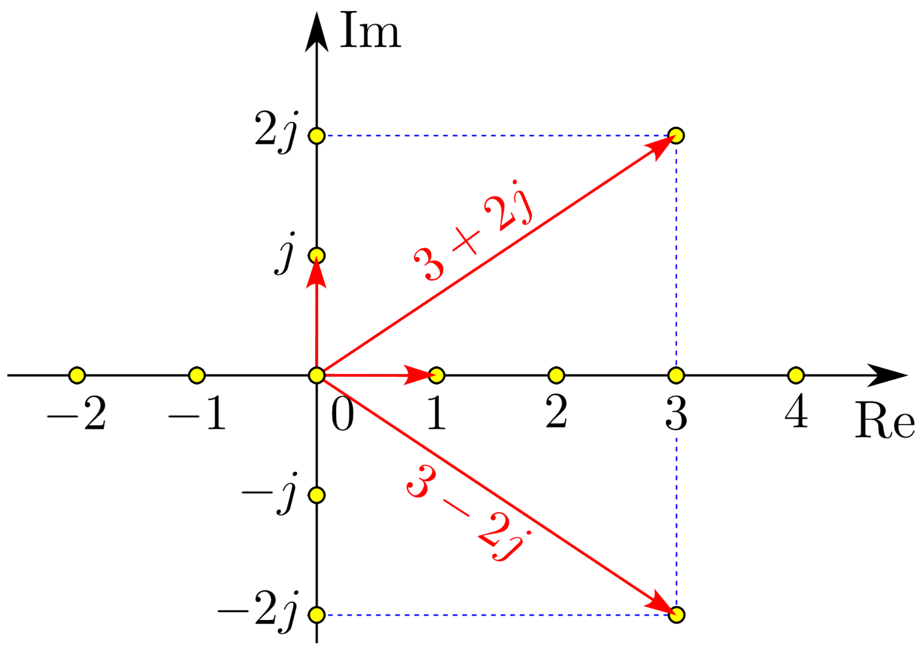


Abbildung 2: Komplexe Zahlen können auch durch Pfeile veranschaulicht werden. Hier sind die gleichen komplexen Zahlen gezeigt wie in Abbildung 2, wobei nun 1, j, $3 + 2j$ und $3 - 2j$ als Pfeile dargestellt sind.

Das komplex Konjugieren – (2.14) bzw. (2.15) – erhält so ebenfalls eine geometrische Bedeutung: Die zu z komplex konjugierte Zahl $\overline{z}$ geht aus z durch eine Spiegelung an der reellen Achse hervor. In Abbildung 1 sind die zueinander komplex konjugierteen Zahlen $3 + 2j$ und $3 - 2j$ als Punkte dargestellt, in Abbildung 2 als Pfeile. Sowohl rechnerisch als auch grafisch ist klar, dass zweimaliges Hintereinanderausführen der komplexen Konjugation zur Ausgangszahl zurückführt, d.h. dass für beliebige $z \in \mathbb{C}$

$$\overline{\overline{z}} = z \tag{5.17}$$

gilt. (Das ist der Grund dafür, dass wir von „zueinander komplex konjugierten Zahlen“ sprechen können.) Die reellen Zahlen sind genau jene komplexe Zahlen, für die $\overline{z} = z$ gilt. Eine reelle Zahl geht unter einer Spiegelung an der reellen Achse in sich selbst über (Beispiel: $\overline{1} = 1$). Die imaginären Zahlen sind genau jene komplexen Zahlen, für die $\overline{z} = -z$ gilt. Eine imaginäre Zahl geht unter einer Spiegelung an der reellen Achse in minus sich selbst über (Beispiel: $\overline{j} = -j$).

Damit haben wir die komplexen Zahlen von „abstrakten Rechenobjekten“ zu Zahlenpaaren und in der Folge zu Punkten (oder Pfeilen) in der Zeichenebene gemacht. Als solche sind sie wunderbar wohldefinierte mathematische Objekte. Von nun an können wir wahlweise mit ihnen *rechnen* oder sie *zeichnen*. Für viele Zwecke ist es günstig, *beides* zu machen und zu versuchen, die Rechnung durch die Zeichnung und die Zeichnung durch die Rechnung zu verstehen.

6 Absolut-(Betrag) einer komplexen Zahl

Die Darstellung von komplexen Zahlen durch Pfeile gibt Anlass zu einem weiteren wichtigen Begriff: Jeder Pfeil, der eine komplexe Zahl z darstellt, hat eine bestimmte Länge. Wir nennen sie den **Absolutbetrag** (kurz **Betrag**) von z. Er ist gleich dem Abstand des Punktes, der z darstellt, vom Ursprung. Wir bezeichnen ihn mit $|z|$. Als „Abstand vom Ursprung“ ist er eine Verallgemeinerung des Betrags einer reellen Zahl auf die komplexe Zahlenebene. Für eine reelle Zahl stimmt er mit deren üblichem (Absolut-)Betrag überein.

Sehen wir uns zuerst als konkretes Beispiel die komplexe Zahl $3+2j$ in Abbildung 2 an: Das Dreieck mit den Eckpunkten 0, 3 und $3 + 2j$ ist rechtwinkelig. Seine Kathetenlängen sind 3 (der Realteil von $3 + 2j$) und 2 (der Imaginärteil von $3 + 2j$). Die Länge seiner Hypotenuse ist gleich der Länge des Pfeils, der $3 + 2j$ darstellt, also gleich $|3 + 2j|$. Der Satz von Pythagoras[21] besagt dann

$$|3 + 2j|^2 = 3^2 + 2^2 = 9 + 4 = 13, \tag{6.18}$$

woraus

$$|3 + 2j| = \sqrt{13} \tag{6.19}$$

folgt.

Ist allgemein $z = x + j\,y$ (mit $x, y \in \mathbb{R}$), so ergibt sich (genau wie im obigen Beispiel) mit dem Satz von Pythagoras

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \tag{6.20}$$

oder, anders angeschrieben,

$$|z|^2 = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2. \tag{6.21}$$

[21] Siehe dazu das Skriptum *Winkelfunktionen und ihre Graphen*.

Daraus folgt mit

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2} \tag{6.22}$$

eine Formel zur Berechung des Betrags einer komplexen Zahl. Aus ihr ergibt sich, dass stets $|z| \geq 0$ gilt, und dass $|z|$ nur dann gleich 0 ist, wenn $x = y = 0$ ist, d.h. wenn $z = 0$ ist. Weiters ist klar, dass das komplex Konjugieren den Betrag einer komplexen Zahl nicht ändert, d.h. dass stets

$$|\overline{z}| = |z| \tag{6.23}$$

gilt. Das ergibt sich sowohl rechnerisch (ersetzen Sie x durch $-x$ in (6.20) oder (6.22)!) als auch geometrisch (die Spiegelung eines Pfeils an der reellen Achse ändert seine Länge nicht).

Eine weitere wichtige Erkenntnis ergibt durch die Beobachtung

$$z\,\overline{z} = (x + j\,y)\,(x - j\,y) = x^2 + y^2 \tag{6.24}$$

(die wir auch schon früher gemacht haben, siehe (2.16)), woraus mit (6.20) folgt

$$|z|^2 = \overline{z}\,z. \tag{6.25}$$

Bitte merken Sie sich diese Beziehung! Sie hat sehr nützliche Anwendungen. Wenn wir beispielsweise ihre beiden Seiten durch $z\,|z|^2$ dividieren, erhalten wir mit

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{|z|^2} \tag{6.26}$$

eine bequeme Formel für die Berechnung des Kehrwerts einer (von 0 verschiedenen) komplexen Zahl. Ersetzen wir in ihr $|z|^2$ durch $\overline{z}\,z$, so erkennen wir, dass es sich dabei um einen Spezialfall unserer Divisionsregel (2.18) mit $z_1 = 1$ und $z_2 = z$ handelt.

Der Begriff des Absolutbetrags und sein Zusammenspiel mit der Multiplikation komplexer Zahlen wird im Nachfolgeskriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* eine wichtige Rolle spielen.

7 Zwischenbilanz

Dass die Menge $\mathbb{C}$ als Ebene angesehen werden kann, hilft unserer Vorstellung immens – aber damit haben wir die komplexen Zahlen noch nicht zur Gänze erfasst! Die komplexen Zahlen wurden ja durch eine besondere Art zu *rechnen* eingeführt, und die haben wir bisher bei der Erweiterung der Zahlengeraden zu einer Ebene noch nicht berücksichtigt. Wir können komplexe Zahlen addieren und multiplizieren, und mittlerweile können wir auch mathematische Probleme wie das Auffinden der komplexen Lösungen von quadratischen Gleichungen rechnerisch bewältigen. Diese „algebraische" Struktur überträgt sich nun auf die komplexe Ebene:

- Zu je zwei Punkten z_1 und z_2 der komplexen Zahlenebene gibt es einen Punkt, der der Summe $z_1 + z_2$ entspricht.
- Zu je zwei Punkten z_1 und z_2 der komplexen Zahlenebene gibt es einen Punkt, der dem Produkt $z_1 z_2$ entspricht.

Erst wenn wir wissen, wie diese Operationen (die Grundrechnungsarten) in der komplexen Zahlenebene „wirken“ (d.h. wie sie geometrisch dargestellt und verstanden werden können), rundet sich Bild, das wir uns vom Konzept dieser neuartigen Zahlen machen, ab.

Die erste Frage, die sich dabei stellt (Wie wirkt die Addition in der komplexen Zahlenebene?) behandeln wir noch in diesem Skriptum. Zur zweiten Frage (Wie wirkt die Multiplikation in der komplexen Zahlenebene?) kommen wir im Nachfolgeskriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion*.

8 Addition und komplexe Konjugation in der komplexen Zahlenebene

Wie sich die Addition komplexer Zahlen auf die komplexe Zahlenebene überträgt, ist leicht herausgefunden. Erinnern wir uns an die allgemeine Regel (2.2) für die Addition in der Menge $\mathbb{C}$. Auf Zahlenpaare übertragen, lautet sie

$$(x_1, y_1) + (x_1, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2). \tag{8.27}$$

Falls Ihnen die Vektorrechnung[22] nicht gänzlich unbekannt ist, sollten Sie jetzt ein kleines Aha-Erlebnis haben: Was hier steht, ist die Regel für die Addition zweidimensionaler Vektoren. Man kann sie sehr schön geometrisch charakterisieren, wenn komplexe Zahlen durch Pfeile charakterisiert werden. Die komplexe Zahl $z_1 = x_1 + j\,y_1$ bzw. das Zahlenpaar (x_1, y_1) wird durch den Pfeil vom Ursprung zum Punkt (x_1, y_1) gedeutet, und die komplexe Zahl $z_2 = x_2 + j\,y_2$ bzw. das Zahlenpaar (x_2, y_2) wird durch den Pfeil vom Ursprung zum Punkt (x_2, y_2) gedeutet. Dann erhält man den Pfeil, der der Summe $z_1 + z_2$, also $x_1 + x_2 + j\,(y_1 + y_2)$, d.h. dem Zahlenpaar $(x_1 + x_2, y_1 + y_2)$ entspricht, durch das „Hintereinanderhängen der Pfeile von z_1 und z_2“. Da es dabei auf die Reihenfolge nicht ankommt, entsteht ein Parallelogramm (Stichwort „Kräfteparallelogramm“), wie in Abbildung 3 illustriert.

Die Addition komplexer Zahlen spielt sehr schön mit dem komplex Konjugieren überein: Für $z = x_1 + j\,y_1$ und $z_2 = x_2 + j\,y_2$ ergibt sich rechnerisch

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{x_1 + x_2 + j\,(y_1 + y_2)} = x_1 + x_2 - j\,(y_1 + y_2). \tag{8.29}$$

Das ist aber gerade die Summe von $\overline{z_1} = x_1 - j\,y_1$ und $\overline{z_2} = x_2 - j\,y_2$. Es gilt also die schöne Regel

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}. \tag{8.30}$$

[22] Das bisschen Vektorrechnung, das im Folgenden hilfreich ist, wird im Skriptum *Zahlenpaare und Zahlentripel* behandelt. *Ganz* kurz gesagt das Allerwichtigste: Ein (zweidimensionaler) Vektor ist ein reelles Zahlenpaar, das geometrisch als Punkt oder Pfeil in der Ebene gedeutet werden kann. Vektoren werden entsprechend der Regel (8.27) addiert. Für $a \in \mathbb{A}$ wird das a-fache eines Vektors (x_1, x_2) mit Hilfe der Formel

$$a\,(x_1, y_1) = (ax_1, ay_1) \tag{8.28}$$

berechnet.

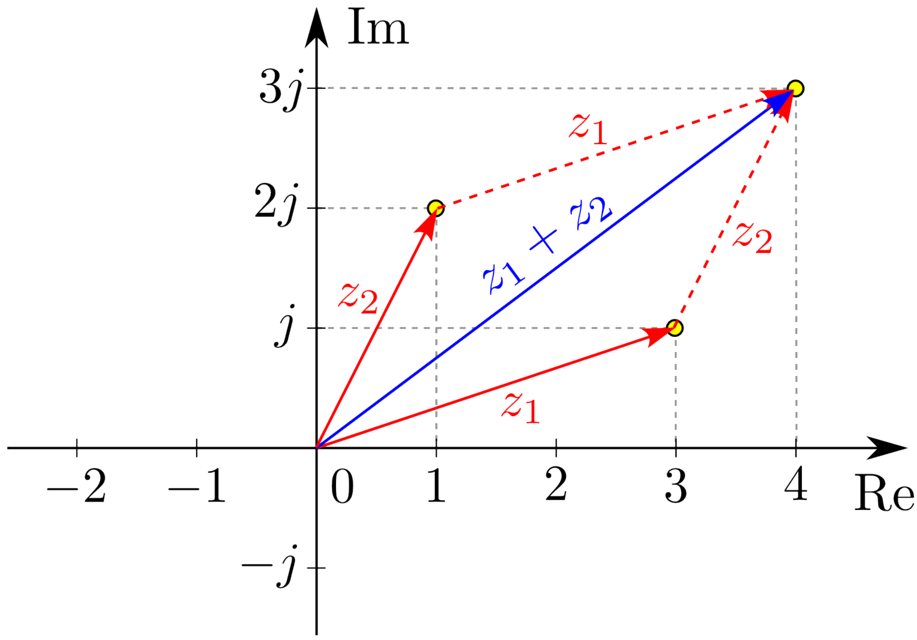


Abbildung 3: Um zwei komplexe Zahlen zu addieren, werden die Pfeile, die sie repräsentieren, aneinandergehängt, hier skizziert anhand des Beispiels $z_1 = 3 + j$ und $z_2 = 1 + 2j$ (beide in rot dargestellt). Rechnerisch ergibt sich die Summe zu $z_1 + z_2 = 4 + 3j$. Der Pfeil, der dieser Summe entspricht (in blau dargestellt), kann grafisch erhalten werden, indem an den Endpunkt (die Spitze) des Pfeils für z_1 der Anfangspunkt (der Schaft) einer parallelverschobenen Version des Pfeils für z_2 (rot strichliert) gehängt wird. Man kann es auch umgekehrt machen und an den Pfeil für z_2 die entsprechende parallelverschobene Version von z_1 (ebenfalls rot strichliert) anhängen – das Ergebnis ist in beiden Fällen das gleiche. Auf diese Weise ergibt sich ein Parallelogramm (ganz analog zu dem bei der Addition von Kräften auftretenden wohlbekannten „Kräfteparallelogramm“). Machen Sie sich anhand dieser Skizze klar, wie die getrennte Addition der Realteile und der Imaginärteile von z_1 und z_2 – gemäß (2.2) bzw. (8.27) – zu dieser Regel des Pfeile-Aneinanderhängens führt!

In Worten: Die komplex Konjugierte einer Summe ist die Summe der komplex Konjugierten. Geometrisch können wir das so verstehen: Die Pfeile, die z_1, z_2 und $z_1 + z_2$ darstellen, bilden gemeinsam ein Parallelogramm wie in Abbildung 3. Werden sie an der reellen Achse gespiegelt, so ergibt sich eine gespiegelte Variante dieses Parallelogramms. Daher ist die gespiegelte Variante von $z_1 + z_2$ gleich der Summe der gespielegten Varianten von z_1 und z_2. Das ist aber genau die Aussage von (8.30), wenn das komplex Konjugieren als „Spiegelung an der reellen Achse“ verstanden wird.

Auch das Subtrahieren komplexer Zahlen und das Bilden reeller Vielfache einer komplexen Zahl haben schöne geometrische Deutungen – siehe Abbildung 4.

Fassen wir zusammen: Die Addition komplexer Zahlen stellt sich auf diese Weise als eine sehr einfache und geometrisch anschauliche Operation heraus. Auch das komplex Konjugieren und der Betrag einer komplexen Zahl haben anschauliche geometrische Bedeutungen. *Dafür* hat man die komplexen Zahlen aber nicht erfinden müssen! Das wirklich Neue ist die komplexe *Multiplikation*, die wir ja über die Regel (1.3) für unser „Rechenobjekt“ j eingeführt und

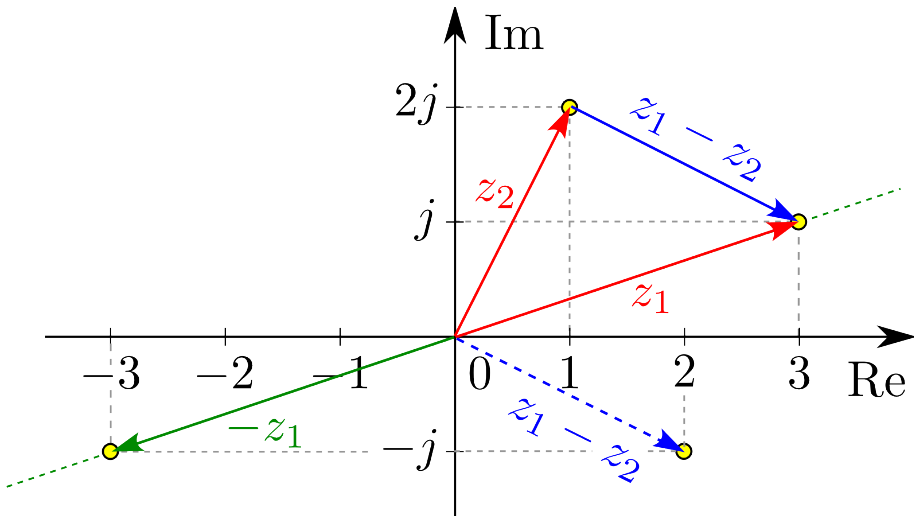


Abbildung 4: Um den Pfeil zu ermitteln, der die Differenz $z_1 - z_2$ darstellt, werden die Pfeile für z_1 und z_2 (in rot dargestellt) mit dem Anfang in den gleichen Punkt (hier in den Ursprung) gehängt. Der Pfeil von $z_1 - z_2$ (in blau dargestellt) ist dann jener, der von der Spitze von z_2 zur Spitze von z_1 verläuft. Man nennt das auch die „Spitze-minus-Schaft-Regel". Sie kann leicht überprüft werden, indem man die „Probe" macht: Es muss ja $z_2 + (z_1 - z_2) = z_1$ gelten. Hängt man gemäß der Regel für die Addition den Pfeil für $z_1 - z_2$ an den Pfeil für z_2, so ergibt sich als Summe $z_2 + (z_1 - z_2)$ gerade der Pfeil für z_1. Die Skizze illustriert diesen Sachverhalt für $z_1 = 3 + j$ und $z_2 = 1 + 2j$, mit der Differenz $z_1 - z_2 = 2 - j$. Man kann den so erhaltenen Pfeil für $z_1 - z_2$ auch parallelverschieben, sodass der Anfang des (blau strichliert dargestellten) verschobenen Pfeils in den Ursprung fällt. Dessen Spitze liegt dann gerade in jenem Punkt der komplexen Ebene, der der komplexen Zahl $z_1 - z_2$ entspricht.

Ist a eine reelle Zahl und z eine komplexe Zahl, so wird az (das a-fache von z) durch einen Pfeil dargestellt, der parallel zu jenem für z ist, aber mit $|a|$-facher Länge. Ist $a < 0$, so wird zusätzlich die Orientierung umgedreht. Ein Spezialfall ist das (-1)-fache einer komplexen Zahl z, also $-z$. In der Skizze ist zusätzlich zu $z_1 = 3 + j$ auch $-z_1 = -3 - j$ (in grün) eingezeichnet, dargestellt durch den zu z_1 gleich langen, aber entgegengesetzt orientierten Pfeil.

durch die allgemeine Regel (2.6) für beliebige komplexe Zahlen formuliert haben. Erst sie führt uns zu den relevanten Anwendungen. Die komplexe Multiplikation geometrisch darzustellen, ist ein eigenes Thema mit eigenen Methoden (die im Gegenzug dann wieder das Rechnen erleichtern), dem wir uns im Nachfolgeskriptum *Polardarstellung komplexer Zahlen und die komplexe Exponentialfunktion* zuwenden.

9 Übungsaufgaben

Hier eine Auswahl von Übungsaufgaben, die Sie mit Hilfe des in diesem Skriptum Gesagten bewältigen können sollten:

- Ermitteln Sie die Komponentendarstellung von $3-2j+j\,(5+2j^2)-(2-j)$!

  Lösung:

  $$1+2j.$$

- Berechnen Sie j^{100}, j^{101}, j^{102} und j^{103} !

  Lösung:

  $$j^{100}=1\,,\ j^{101}=j\,,\ j^{102}=-1\,,\ j^{103}=-j.$$

- Für $z=3-4j$ berechnen Sie $\overline{z}$ und $|z|$!

  Lösung:

  $$\overline{z}=3+4j,\ |z|=5.$$

- Ermitteln Sie die Komponentendarstellung von $\dfrac{2+3j}{1+2j}$!

  Lösung:

  $$\frac{2+3j}{1+2j}=\frac{8}{5}-\frac{1}{5}\,j.$$

- Mit $z=\dfrac{1}{1+j}$ berechnen Sie $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$, $\overline{z}$ und $|z|$!

  Lösung:

  $z=\dfrac{1-j}{2}$, daher $\mathrm{Re}(z)=\frac{1}{2}$, $\mathrm{Im}(z)=-\frac{1}{2}$.

  Daraus ergibt sich $\overline{z}=\dfrac{1+j}{2}$, $|z|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

- Sei $w=\dfrac{-1+j\sqrt{3}}{2}$. In diesem Skriptum wurde argumentiert, dass $w^3=1$ ist. Überprüfen Sie das. indem Sie w^3 explizit berechnen!

  Tipp:

  Berechnen Sie zuerst $w^2=\dfrac{-1-j\sqrt{3}}{2}$

  und multiplizieren Sie nun mit w !

- Sei $w = \dfrac{1 + j\sqrt{3}}{2}$. Zeigen Sie, dass $w^3 = -1$ gilt!

  Tipp:

  Gehen Sie vor wie in der vorigen Aufgabe!

- Lösen Sie die Gleichung $z^2 + 64 = 0$ über $\mathbb{C}$!

  Lösung:

  $$z_{1,2} = \pm 8j.$$

- Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 49 = 0$ über $\mathbb{C}$!

  Lösung:

  $z_{1,2} = \pm 7$. Beide Lösungen sind reell.

- Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 6z + 34 = 0$ über $\mathbb{C}$!

  Lösung:

  $$z_{1,2} = 3 \pm 5j.$$

- Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 6z + 35 = 0$ über $\mathbb{C}$!

  Lösung:

  $$z_{1,2} = 3 \pm j\sqrt{26}.$$

- Lösen Sie die Gleichung $z^2 - 5z + 2 = 0$ über $\mathbb{C}$!

  Lösung:

  $$z_{1,2} = \frac{5 \pm j\sqrt{17}}{2}.$$

- Schreiben Sie $z^2 + 9$ als Produkt von Linearfaktoren!

  Lösung:

  $$z^2 + 9 = (z + 3j)\,(z - 3j).$$

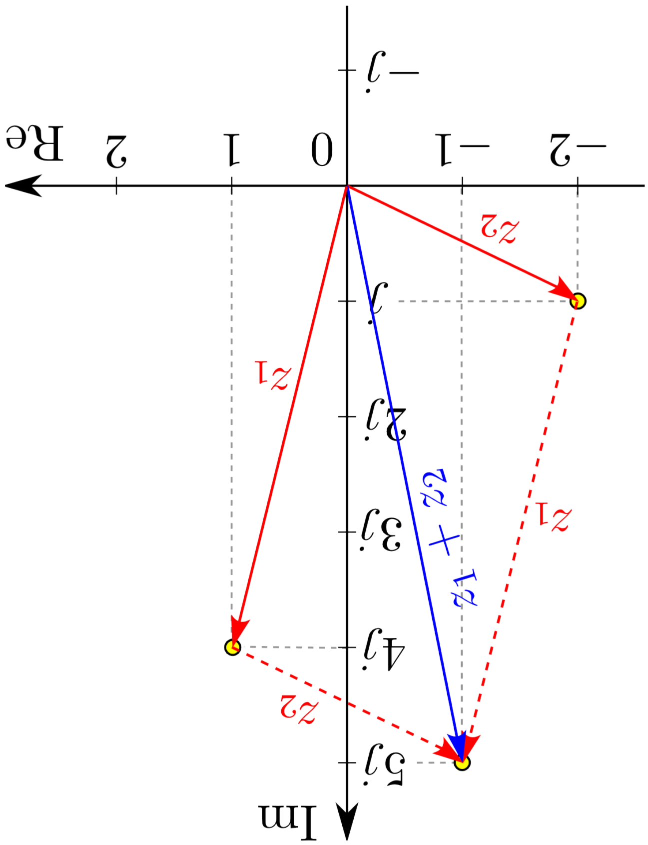
- Schreiben Sie $z^2 - 8z + 20$ als Produkt von Linearfaktoren!

  Lösung:

  $$z^2 - 8z + 20 = (z - 4 + 2j)\,(z - 4 - 2j).$$

- Machen Sie eine Skizze, die zeigt, wie $z_1 = 1 + 4j$ und $z_2 = -2 + j$ mit Hilfe der Regel des „Pfeile-Aneinanderhängens“ addiert werden!

  Lösung:



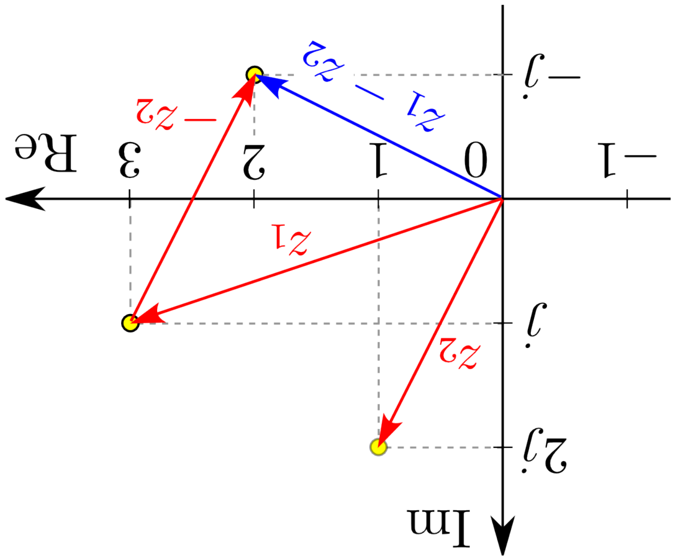
- Machen Sie eine Skizze, die zeigt, wie die drei komplexen Zahlen $z_1 = 3+2j$, $z_2 = -2-j$ und $z_3 = 2 - 4j$ mit Hilfe der Regel des „Pfeile-Aneinanderhängens“ addiert werden!

  Tipp:

  Hängen Sie die drei Pfeile, die den angegebenen komplexen Zahlen entsprechen, in beliebiger Reihenfolge aneinander! Berechnen Sie zur Probe $z_1 + z_2 + z_3$ und vergleichen Sie mit Ihrer Skizze!

- Machen Sie eine Skizze wie in Abbildung 4 und zeichnen Sie zusätzlich ein, wie man die Differenz $z_1 - z_2$ auch durch die Operation $z_1 + (-z_2)$ erhalten kann, also durch das Aneinanderhängen der Pfeile für z_1 und $-z_2$!

  Lösung:

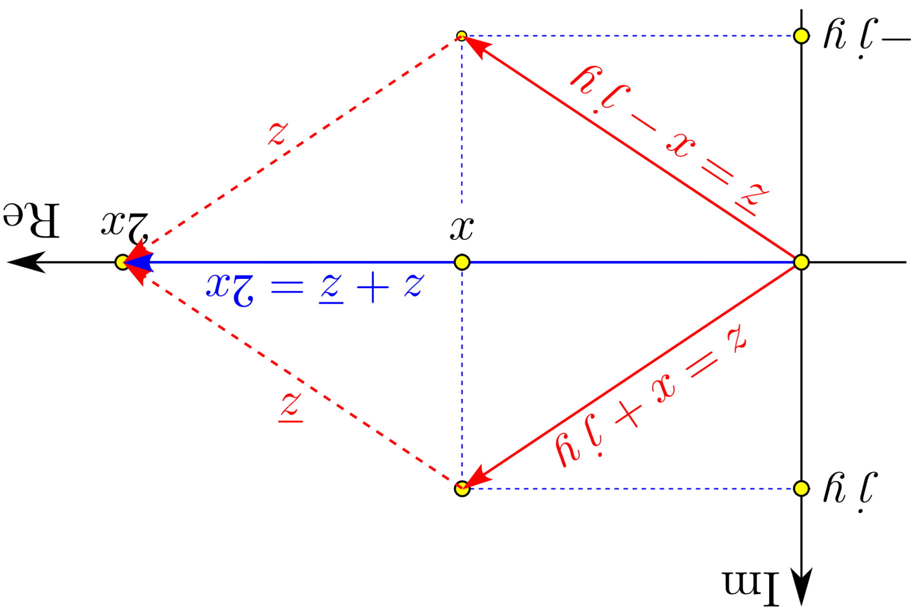


- Beweisen Sie (a) rechnerisch, (b) durch eine Zeichnung mit Pfeilen, dass für jede komplexe Zahl z die Summe $z + \overline{z}$ reell ist!

  Lösung:

  Rechnerisch, mit $z = x + j\,y$: $z + \overline{z} = x + j\,y + x - j\,y = 2x \in \mathbb{R}$.

  Zeichnerisch, mit $z = x + j\,y$ für $x, y > 0$:



- Beweisen Sie rechnerisch, dass für jede komplexe Zahl z gilt:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}\,(z + \overline{z}) \tag{9.1}$$

$$\mathrm{Im}(z) = -\frac{j}{2}\,(z - \overline{z}) \tag{9.2}$$

  Lösung:

  Mit $z = x + j\,y$ gilt $\overline{z} = x - j\,y$ und daher
  $$\tfrac{1}{2}\,(z + \overline{z}) = \tfrac{1}{2}\,(x + j\,y + x - j\,y) = \tfrac{1}{2}\,(x + x) = x$$
  und $-\frac{j}{2}\,(z - \overline{z}) = -\frac{j}{2}\,(x + j\,y - x + j\,y) = -\frac{j}{2}\,(j\,y + j\,y) = y$.

- Sei $z = 3 + 4j$. Überprüfen Sie in einer möglichst genauen Skizze, dass die Pfeile, die die komplexen Zahlen z und $j\,z$ darstellen, gleiche Länge haben und aufeinander normal stehen!

  Tipp:

  Bevor Sie zeichnen, berechnen Sie zuerst $j\,z$!

  Anmerkung dazu: Das gilt nicht nur für die angegebene komplexe Zahl z, sondern für alle (von 0 verschiedenen) komplexen Zahlen! Warum das so ist, wird im Nachfolgeskriptum besprochen.

Dieses Skriptum wurde erstellt im August 2017 im Rahmen der Kooperation
„Skripten für technische Studiengänge“
(http://www.mathe-online.at/projekte/KooperationFHTWSkripten.html)
von mathe online (http://www.mathe-online.at/) mit der Fachhochschule Technikum Wien
(http://www.technikum-wien.at/).
Die Skripten-Seite finden Sie unter http://www.mathe-online.at/skripten/.